VZDĚLÁVÁNÍ NADANÝCH ŽÁKŮ

NEKONEČNO POHLEDEM NADANÝCH ŽÁKŮ VÍCELETÉHO GYMNÁZIA

EDUCATION OF GIFT STUDENTS

INFINITELY FROM THE POINT OF VIEW OF THE TALENTED PUPILS OF THE MULTI-YEAR HIGH SCHOOL

Róbert Glézl[1], Samuel Hána[2], Bronislava Melcerová[3]

[1]*Pedagogická fakulta, Masarykova univerzita, Poříčí 31, Brno, robertglezl3@gmail.com*
[2]*Pedagogická fakulta, Masarykova univerzita, Poříčí 31, Brno, samuelhana@seznam.cz*
[3]*Pedagogická fakulta, Masarykova univerzita, Poříčí 31, Brno, bronislava198@gmail.com*

Abstrakt

Tento příspěvek si klade za cíl prezentovat výsledky Specifického výzkumu prováděného na Pedagogické fakultě Masarykovy univerzity, který se zaměřuje na způsob, jakým žáci nižšího stupně víceletého gymnázia chápou a vnímají matematický pojem nekonečno. Sběr dat byl realizován metodou pozorování a rozhovoru na workshopu, v rámci kterého žáci samostatně řešili úlohy týkající se pojmu nekonečna. Výzkumný vzorek tvořilo 16 žáků ve věku 11 až 14 let. Ze zjištění vyplynulo, že každý ze zúčastněných žáků se s pojmem nekonečna již někdy setkal. Lze tvrdit, že u většiny z nich převládá potenciální chápání pojmu nekonečna.

Klíčová slova: nadaní žáci, víceleté gymnázium, nekonečno

Abstract

This post aims to present the results of specific research conducted at the Faculty of Education of Masaryk University, focusing on how lower-grade students of a multi-year gymnasium understand and perceive the mathematical concept of infinity. Data collection was carried out through observation and interviews during a workshop in which students independently solved tasks related to infinity. The research sample consisted of 16 students aged 11 to 14 years. The findings indicate that each of the participating students has encountered the issue of infinity at some point. It can be argued that, for the majority of them, there is a prevailing potential understanding of infinity.

Key words: gifted students, multi-year gymnasium, infinity.

Úvod

Tento článek navazuje na specifický výzkum, který vznikl na Masarykově univerzitě v rámci projektu "Rozvoj vědeckého myšlení: Podpora studentských aktivit tří profesních mikrospolečenství" číslo MUNI/A/1435/2022, podpořeného z prostředků účelové podpory na specifický vysokoškolský výzkum, kterou poskytlo MŠMT v roce 2022. Specifický výzkum byl zaměřen na prozkoumání pohledu nadaných žáků na pojem nekonečna v matematice pod vedením Petry Buškové a Jany Veselákové.

Matematika jako samostatná věda prošla od svého vzniku až do dnešních dnů dlouhou cestu. Na své cestě zažila vzestupy i krize. A právě historie matematiky nás učí, že kde se při jejím vývoji objevily potíže s přijetím či porozuměním daných témat, či myšlenek tam je můžeme očekávat i ve školské matematice. Jinak tomu není ani u jednoho z klíčových pojmů matematiky – u nekonečna. O tom, že se jedná o náročnou myšlenku, svědčí i historický vývoj a příběhy světových matematiků, mezi které patří i příběh německého matematika Georga Cantora a také jakýsi filozofický přesah pojmu nekonečna. Jednou z oblastí dnešní matematiky je i teorie množin[1], která se zabývá z velké části určitým počítáním s nekonečnem. Žáci na základních školách se s ní, ani s konceptem nekonečna, do hloubky nesetkávají. To však neznamená, že by se žáci nesetkali ani s pojmem nekonečna, právě naopak. Mnoho témat matematiky na úrovni základních škol se nekonečna dotýká, zejména v geometrii, ale i v některých algebraických úlohách, úlohách s přesahem do fyziky, či u úloh zahrnujících počet pravděpodobnosti nebo posloupnosti. A právě při takových úlohách se v heterogenních kolektivech v třídách na základních školách s pojmem nekonečna setkají i žáci nadaní. A jelikož toto téma, má-li být jeho koncept vytvářen korektně, vyžaduje opravdu vysokou míru abstrakce, cílovou skupinou našeho kvalitativního šetření jsou právě žáci nadaní.

Proč nekonečno?

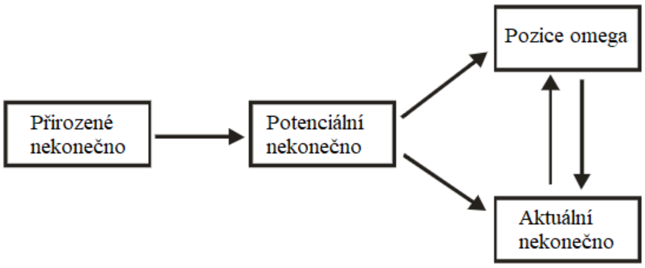
Jak už jsme zmiňovali v úvodu článku, pojem nekonečno je nedílnou součástí matematiky, a to se projevuje už i v matematice školské, i když Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (dále v textu jen RVP ZV) (2021) pojem nekonečno přímo nezmiňuje. Jak uvádí Kuřina a Vondrová (2022) ve své publikaci *15 pohledů na školskou matematiku*, koncept pojmu nekonečno lze u žáků rozvíjet již od základních škol například na tématech z geometrie či aritmetiky. Důležitou myšlenkou je také samotný fakt, že přirozená čísla, jakožto základní pojem matematiky, vytváří množinu nekonečnou. Jak vidíme, tématu nekonečna se sice lze na základní škole vyhýbat, ne však zcela úplně vyhnout. Jak ale tomuto tématu rozumí samotní žáci? Odpověď na tuto otázku nám přináší rozsáhlá studie z Finska, ve které kolektiv autorů Hannula et al. (2006) provedl šetření ohledně porozumění žáků konceptu nekonečna

[1] V Česku se teorií množin významně zabývali například i profesor Petr Vopěnka či docent Eduard Fuchs.

na vzorku 1154 žáků ve věku 11–12 let a 1902 žáků ve věku 13–14 let. Z výzkumu vyplynulo, že úroveň porozumění těchto žáků nekonečnu byla velice nízká. Žáci měli většinou tendenci myšlenkově zůstávat pouze v konečných množinách. Malá část žáků, která se od uvažování v konečných množinách oprostila, se dle autorů pohybovala na úrovni tzv. potenciálního nekonečna.

Další pohled na pojem nekonečno a jeho porozumění přináší také Cihlář et al. (2015). Ten se opírá o 4 pozice vnímání nekonečna[2], kde k potenciálnímu (nekonečné je něco, co lze pořád rozšiřovat) a aktuálnímu (vnímá nekonečno jako "uzavřený" nekonečný celek) vnímání nekonečna přidává ještě navíc přirozené nekonečno (nekonečno vnímané jako něco, co sahá až po pomyslný horizont, který ale nepřesáhne) a zejména pozici omega. V této pozici podle něj žáci intuitivně pracují s *"nesprávnými nekonečně velkými nebo malými čísly, body a jinými nekonečně velkými nebo nekonečně malými objekty"* (Cihlář et al., 2015, s. 3). Tuto klasifikaci chápání pojmu nekonečna a přechodů mezi pozicemi můžeme vidět na obrázku 1.

Obrázek 1: Pozice vnímání nekonečna, přeloženo (Cihlář et al., 2015 s. 28)



Žáci, zejména ti nadaní, mají tendenci se o pojem nekonečn~~o~~ přirozeně zajímat, ať už v kontextu matematiky, nebo jen myšlenkově, typu, kdo řekne největší číslo, které existuje. Když se však s nekonečnem nebudou setkávat a nebudou moci o něm diskutovat v bezpečném prostředí školy pod dohledem učitele, který tématu rozumí, může snadno dojít k vytvoření miskoncepcí. Mezi časté miskoncepce o pojmu nekonečno patří třeba úvaha, že nekonečno je vlastně reálné číslo. Na opačném konci spektra stojí miskoncepce, že když v reálném životě se s nekonečným počtem (např. nějakých předmětů) nesetkáme, není tohoto pojmu zapotřebí ani v matematice, tudíž jakési popíráni existence nekonečna.

[2] Potenciální i aktuální chápání pojmu nekonečno můžeme ukázat na příkladu přímky. O přímce můžeme uvažovat například tak, jak to popisuje Euklidés ve svých Základech. Tedy jako o úsečce, kterou lze libovolně prodlužovat. Tato představa odpovídá právě potenciálnímu chápání pojmu nekonečno. V případě, že o přímce uvažujeme jako o jakémsi „dokončeném" nekonečném celku, dostáváme se do úrovně aktuálního chápání pojmu nekonečno.

Přirozené nekonečno je pak v naší analogii hodně dlouhá úsečka, která svou délkou sahá až za horizont. V takovém případě může být ze strany pozorovatele považovaná za nekonečně dlouhou. Pozice omega je velice podobná aktuálnímu chápání pojmu nekonečna, avšak pracuje pouze s intuitivními pojmy či nekonečně malými/velkými objekty, které neumí úplně zdůvodnit či definovat.

Nadání

Neexistuje žádná univerzální definice nadání, a různí autoři se tak ve svých definicích liší. Obecně ale můžeme tvrdit, že vymezení nadání se primárně orientuje na základě toho, zda souvisí s potenciálem či výkonem jedince (Budínová, 2018).

Jedním z možných přístupů je vymezení nadání dle hodnoty IQ, tzv. IQ definice, jak uvádí například i Havigerová (2011) ve své publikaci *Pět pohledů na nadání*. Dle tohoto vymezení lze za nadaného považovat žáka, jehož IQ dosahuje určité hodnoty, typicky se uvádí IQ ≥ 130. Pravdou ale je, že v poslední době se od tohoto vymezení spíše upouští.

Nadání totiž nelze pokaždé specifikovat pouze prostřednictvím obecné inteligence. Individuální přístup dává do popředí myšlenku, že každý jedinec je odlišný. V něčem vyniká a v něčem zas ne. Nadaní žáci jsou v tomto ohledu stejní (Gardner, 2006).

Vymezení nadání souvisejícího s potenciálem žáka můžeme nalézt například u autorky Hříbkové (2009), která uvádí, že nadání je často chápáno jako potenciál na straně osobnosti k nějaké činnosti podmiňující mimořádný výkon. Problém ale vidí přímo v určení potenciálu. Potenciál totiž často vyvozujeme právě z výkonu, a ten může být ovlivněn řadou faktorů. Portešová (2021) se ve svém článku opírá například i o myšlenky Wittiho. Za nadaného totiž považuje jedince, který soustavně vykazuje významné výkony v jakékoliv hodnotné oblasti snažení. Tyto myšlenky se nezakládají pouze na posuzování jednoho faktoru, jakým je třeba IQ. Dá se tak říct, že tyto myšlenky byly poměrně revoluční, jelikož, jak jsme už zmiňovali, od takových definic se v poslední době upouští.

Nadání jako "dispozici k projevení nadprůměrných výkonů v jakékoliv hodnotné oblasti lidského snažení" (Havigerová et al. 2011, s. 5).

Jako poslední uvádíme vymezení Národní asociace pro nadané děti (National Association for Gifted Children, 2010): *„Nadaní jedinci jsou ti, kteří prokazují vynikající úrovně nadání (definováno jako výjimečná schopnost uvažovat a učit se) nebo kompetence (dokumentovaný výkon nebo úspěch v top 10 % žáků nebo méně) v jedné nebo více doménách. Domény zahrnují jakoukoli strukturovanou oblast činnosti s vlastním systémem symbolů (např. matematika, hudba, jazyk) a/nebo souborem senzomotorických dovedností (např. malování, tanec, sport)"*.

Dnes už víme, že nadaný žák nemusí být úspěšný v každém předmětu. To je potřeba brát v úvahu při jeho vzdělávání ve školním prostředí. Je důležité zaměřit se na motivaci a podporu žáka v oblasti, ve které vyniká Mudrák (2015) se ve své publikaci *Nadané děti a jejich rozvoj* zmiňuje o hlavních faktorech utvářejících vývoj nadaného žáka. Patří sem výsledky žáka, průběh přípravy a učení, sociální kontext a také již uvedená motivace žáka. Každý žák má své individuální vlastnosti, které ovlivňují jeho chování. Nadaní žáci nejsou výjimkou.

Vzdělávání nadaných žáků

Vzdělávání nadaných žáků je v České republice legislativně zakotveno v zákoně č. 561/2004 Sb., o předškolním, základním, středním, vyšším odborném a jiném vzdělávání (dále označován jako školský zákon).

Vzdělávání těchto žáků je dále upřesněno ve Vyhlášce ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy č. 27/2016 Sb., o vzdělávání žáků se speciálními vzdělávacími potřebami a žáků nadaných v platném znění. Právě ve čtvrté části této vyhlášky podle MŠMT ČR (2021) je definován nadaný žák následovně: *„Za nadaného žáka se pro účely této vyhlášky považuje především žák, který při adekvátní podpoře vykazuje ve srovnání s vrstevníky vysokou úroveň v jedné či více oblastech rozumových schopností, v pohybových, manuálních, uměleckých nebo sociálních dovednostech*“.

Nalezneme zde i definici mimořádně nadaného žáka: *„Za mimořádně nadaného žáka se pro účely této vyhlášky považuje především žák, jehož rozložení schopností dosahuje mimořádné úrovně při vysoké tvořivosti v celém okruhu činností nebo v jednotlivých oblastech rozumových schopností, v pohybových, manuálních, uměleckých nebo sociálních dovednostech*“.

Paragraf 17 školského zákona je věnován vzdělávání nadaných žáků a studentů. V rámci rozvoje nadaných žáků může škola poskytovat rozšířené vyučování některých předmětů a upravit organizaci vzdělávání. Na základě žádosti zákonného zástupce je také možné přeřadit žáka do vyššího ročníku, a sice v případě úspěšného vykonání zkoušek z učiva daného ročníku a za podmínky vyjádření školského poradenského zařízení a lékaře.

Kromě školského zákona a uvedené vyhlášky se dále vzděláváním žáků nadaných a mimořádně nadaných zabývá také Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, kde ho vymezuje část D, kapitola 9 (RVP ZV, 2021, s. 9).

Přístupy ve vzdělávání nadaných žáků

V rámci vzdělávání nadaných žáků mohou být uplatňovány zejména dva přístupy označované jako urychlování vzdělávání žáků (tzv. akcelerace) a obohacování vzdělávání (tzv. enrichment).

Akcelerace umožňuje žákům vzdělávat se rychleji, než je uvedeno ve standardním vzdělávacím plánu, díky tomu, že je jim umožněno vynechávat učivo, které již ovládají a zaměřit se tak na další poznatky. U tohoto přístupu někdy dochází k přeřazení žáka do vyššího ročníku, i když se to v současnosti nedoporučuje z hlediska vývoje žáka v sociální rovině.

Druhý přístup, enrichment, je zaměřen na rozšiřování a obohacování vzdělávacího obsahu pro nadané žáky o nová témata. V tomto přístupu je žákům umožněn rozvoj v oblasti, kterou oni sami preferují. Mohou být využity projektové práce, soutěže, semináře a jiné aktivity (National Association for Gifted Children, 2010).

V případě nadání v matematice je žádoucí zařadit takové aktivity, které by žáka motivovaly k rozvoji jeho schopností. Je vhodné využít tzv. problémové úlohy nebo experimenty, hlavolamy, či paradoxy v matematice. Další vhodný typ úloh pro nadané žáky představují kaskádové úlohy, u kterých se zvyšuje jejich náročnost (Škrabánková et. al., 2013).

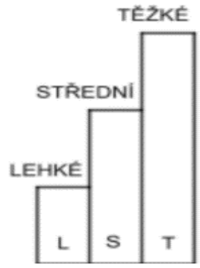
Pro udržení motivace a využití plného potenciálu nadaných žáků je prospěšné zařazovat do vyučování matematice úlohy, které obsahují novost a výzvu pro žáky. V takových úlohách je totiž vyžadována vyšší úroveň myšlení. Takovými úlohami mohou být i úlohy obsahující pojem nekonečna nejen v matematice, ale i mezioborově, například v návaznosti na fyziku a podobně. V tureckém výzkumu (Ozdemir & Isiksal Bostan, 2021) využili kromě mezioborových úloh i úlohy technologicky orientované či matematické hádanky a výsledky tohoto výzkumu vzhledem k výkonu žáků byly povzbudivé.

Cihelková (2017) pak dále uvádí, že mezi způsoby práce s nadanými žáky můžeme zařadit například jejich zapojení do vědomostních soutěží či mimoškolských projektů. A právě toho doporučení jsme využili i my při organizaci workshopu, kde jsme se se žáky věnovali pojmu nekonečna.

Metodologie

Jednalo se o smíšené šetření, a ke sběru dat zvolena kvalitativní forma. Sběr dat probíhal pomocí metod testových úloh a polostrukturovaných rozhovorů, které proběhly v rámci workshopu s názvem "Nekonečno v matematice", který jsme zorganizovali pro žáky na půdě Cyrilometodějského gymnázia a střední odborné školy pedagogické v Brně. V rámci workshopu jsme se zaměřili především na to, aby byla činnost pro žáky obohacující a přínosná. Na začátku workshopu jsme se snažili o navození bezpečného klimatu krátkým představením teorie množin a nekonečna, zejména z historického hlediska či paradoxů.

Písemnou část tvořily motivační dopisy žáků, které byly součástí přihlášky na workshop, a také úlohy, které žáci řešili během samotného workshopu. Úlohy v písemné části, které žáci řešili samostatně, souvisely s pojmem nekonečno v matematice. Ke každé úloze byla navíc přímo na zadání uvedena škála, ve které měli žáci za úkol subjektivně vyznačit náročnost dané úlohy. Tato škála byla inspirována projektem paní docentky Portešové (Výzkumně ověřený inovativní model identifikace a rozvoje matematicky nadaných žáků základních škol VOIM), který byl dokončen v roce 2022 (Obr. 2).



Obrázek 2: Škála náročnosti využitá ve výzkumu převzatá z projektu VOIM (Masarykova univerzita, 2022)

V ústní části, která následovala po písemné části, proběhly polostrukturované rozhovory se žáky. Rozhovory probíhaly ve třech skupinách, přičemž v každé skupině se nacházelo 5–6 žáků. V rozhovorech jsme se ještě hlouběji zaměřili na prozkoumání úrovně porozumění nekonečnu v matematice u žáků. Kvůli snadnějšímu zpracování dat byl z těchto rozhovorů se souhlasem všech stran pořízen audiozáznam.

Všechna sesbíraná data byla následně zpracována. Využili jsme techniku obsahové analýzy žákovských řešení, motivačních dopisů a rozhovorů.

Výzkumný cíl

Cílem kvalitativního šetření bylo analyzovat porozumění nadaných žáků nižšího stupně víceletého gymnázia pojmu nekonečna v matematice a představ (prekonceptů) s ním spojenými.

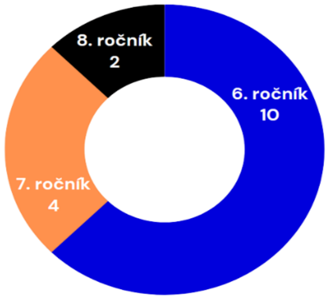
Výzkumný vzorek

Výzkumný vzorek tvořilo celkem 16 nadaných žáků (viz. Obr. 1) Cyrilometodějského gymnázia a střední odborné školy pedagogické, která sídlí v Brně. Toto gymnázium poskytuje vhodné podmínky k učení a rozvoji právě nadaným žákům, a tak je tu najdeme ve větším počtu než na běžných základních školách. V našem nehomogenním výzkumném vzorku byli žáci[3] ve věku 11–14 let:

jeden žák ve věku 14 let
šest žáků ve věku 13 let
pět žáků ve věku 12 let
čtyři žáci ve věku 11 let

a celkově 10 žáků šestého ročníku (primy), 4 žáci sedmého ročníku (sekundy) a 2 žáci osmého ročníku (tercie) (viz. Obr. 2). Účast žáků na šetření byla dobrovolná a ze strany školy podmíněná sepsáním krátkého motivačního dopisu, ve kterém měli žáci popsat svá očekávání od účasti i svou motivaci k této účasti.

Obrázek 1: Rozložení žáků ve vzorku dle pohlaví



Obrázek 2: Rozložení žáků ve vzorku dle ročníku

Tyto dopisy jsme také měli při analýze výsledků šetření k dispozici. Samotný výběr žáků jsme pak provedli i v souladu s doporučeními školní koordinátorky pro nadané žáky.

Úlohy z workshopu

V rámci písemné části probíhalo samostatné řešení úloh žáky, které bylo zaměřeno na matematický pojem nekonečna. U každé úlohy byla poskytnuta možnost volby obtížnosti, vyjádřená třemi stupni: 1 – lehká, 2 – střední a 3 – těžká, která byla inspirována výzkumným projektem vedeným docentkou Portešovou z let 2020–2022 (Výzkumně ověřený inovativní model identifikace a rozvoje matematicky nadaných žáků základních škol VOIM, 2022).

[3] Pod pojmem žáci uvažujeme děvčata i chlapce.

1. Úloha:

Honza z 9. A se připravoval na písemku z matematiky. Na internetu našel následující tvrzení, které ho moc zaujalo. Je tvrzení správné? Jestli ano, jak je to možné? Jestli ne, kde udělal autor chybu?

$a = b$

$a^2 = ab$

$a^2 - b^2 = ab - b^2$

$(a+b)(a-b) = b(a-b)$

$a+b = b$

$b+b = b$

$2b = b$

$2 = 1$

Cílem první úlohy bylo naleznout chybu v provedení důsledkové úpravy rovnice. V postupu, kde se mezi čtvrtým a pátým řádkem dělí levá i pravá strana rovnice výrazem (a–b), je zjevné, že pro a = b je tento výraz roven nule. Dělení nulou není definováno, a proto tato úprava vedla k evidentně chybnému tvrzení 2 = 1. Nekonečno v této algebraické úloze můžeme spatřit právě v tomto kroku.

Během řešení této úlohy se objevil problém u některých žáků, kteří nebyli obeznámeni s úpravami výrazů. V důsledku toho se čtyřikrát objevila odpověď *„nevím"*. Většina žáků si byla vědoma chyby, ale nebyla schopna ji identifikovat. Tři žáci odhalili chybu, zatímco jedna žákyně tvrdila, že postup je správný a výrok platí. Je relevantní dodat, že žák, který úlohu správně vyřešil, předem informoval, že úlohu znal z matematického kroužku. Z celkového počtu šestnácti žáků měli první úlohu správně vyřešenou tři žáci. Osm žáků z hlediska obtížnosti určilo první úlohu jako těžkou, pět žáků jako střední a jeden žák jako lehkou.

Tip: Prostředky žáka na základní škole lze ukázat, proč není možné dělit nulou. Jestliže by pro nenulová čísla a, x platilo $a : 0 = x$, pak by muselo platit $x \cdot 0 = a$, avšak platí $x \cdot 0 = 0$, což je spor. Pro žáky 6. ročníku by bylo možné použít konkrétní přirozená čísla.

2. Úloha

Na konci školního roku si tři kamarádi koupili dort a rozhodli se rozdělit si ho na tři shodné části. Každý tedy dostal jednu třetinu dortu. Jeden z nich si najednou všiml zajímavé věci:

$$\mathbf{\frac{1}{3} = 0,\overline{3}}$$

$$\mathbf{3 \cdot 0,\overline{3} = 0,\overline{9}}$$

Kde zmizela $\mathbf{0,\overline{1}}$ dortu?

Druhá úloha pojednává o dělení dortu na třetiny, přičemž pod zadáním úlohy je zápis zlomku a ekvivalentní periodické číslo. Otázkou bylo, kam zmizela $0,\overline{1}$ dortu, když se na první pohled zdá, že po zpětném vynásobení tohoto čísla číslem 3 nedostaneme výsledek jedna celá.

Většina žáků odpověděla správně, že nikam, protože se jednalo o periodická čísla. Jedna žákyně na otázku, kam ta část zmizela, odpověděla následovně: *"Je to v tom periodickém. Protože to může vypadat i takto 0,999999... a tak do nekonečna."* Můžeme tedy vidět, že si žáci uvědomují spojitost nekonečna a periodického rozvoje čísel s tím, že žádnou část dortu neztratíme. Tři žáci měli na úlohu čistě praktický realistický pohled a odpověděli podobně jako následující žákyně: *"Když se dort krájel, možná kousek dortu odpadl nebo se odlomil."* Dva žáci odpověděli nesprávně v tom smyslu, že se ten dort nedá rozdělit. Jeden z těchto žáků řekl: *"Nikam. 3 nedělí 10, takže to prostě nevyjde."* Druhou úlohu mělo z celkového počtu správně vyřešenou dvanáct žáků. Obtížnost druhé úlohy žáci hodnotili následovně: devět žáků označilo tuto úlohu jako střední, jeden jako těžkou a šest žáků jako lehkou.

Tip: Prostředky žáka na základní škole lze zdůvodnit rovnost $0,\overline{9} = 1.$ K zdůvodnění lze využít algoritmu pro převod desetinného čísla na zlomek:

$x = 0,\overline{9}$

$10x = 9,\overline{9}$

Z toho plyne $10x - x = 9,\overline{9} - 0,\overline{9}$

$9 = 9x$

x = 1

3. Úloha

Jirka se rozhodl matematicky přesně vybarvit plochu čtverce tak, že napřed vybarví celou jeho polovinu, pak polovinu zbývající části, pak opět polovinu zbývající části, a tak dále. Povede se mu tímhle způsobem vybarvit celý čtverec? Svou odpověď zdůvodni.

Třetí úloha představuje příklad sčítání nekonečné řady v konkrétním případě. Úkolem bylo vybarvit polovinu plochy čtverce, později polovinu zbývající poloviny této plochy a tak dále. Otázka byla velmi jednoduchá: podaří se vybarvit tímto způsobem celý čtverec? Každý žák ve své odpovědi napsal, že to nejde, protože vybarvením pouze poloviny dané plochy zůstane vždy kousek nevybarvený, nebo že bude Jirka tímto způsobem vybarvovat do nekonečna. Všechny tyto odpovědi zazněly, takže každý žák si uvědomoval, že to prakticky není možné. Sedm žáků však dále ve svém popisu uvedlo, že to je možné za určitých podmínek, například: *„Ano, protože Jirka určitě přeškrtne“* nebo *„Pokud by byla tyč nekonečně tenká, bylo by to možné“*. Ostatních pět žáků z těchto sedmi vidělo praktickou možnost vybarvení v tloušťce hrotu tužky nebo zvýrazňovače. Jeden žák napsal zajímavý pohled, který ukazuje, že právě nadaní žáci mají často neobvyklý pohled na řešení. Napsal: *„V případě, že by se příklad mohl počítat tak, že bychom vždy naskládali vybarvené části, tak možná ano“*. Třetí úloha byla z hlediska vyřešení úloh nejúspěšnější. Všichni žáci správně odpověděli na tuto úlohu. Na stupnici obtížnosti čtyři žáci označili úlohu jako střední a dvanáct jako lehkou.

Tip: Žákovi na základní škole lze součet nekonečné řady $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=1$ zdůvodnit třeba podobným trikem, jaký prý kdysi využil Gauss ještě jako žáček. Označme součet $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$ písmenkem S. Pak platí: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=S$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=2S$$

Obě řady teď můžeme od sebe odečíst, čím dostaneme rovnost $S=1$. Součet této nekonečné řady je tedy konečný. I náš čtverec bychom tak vybarvit mohli, avšak trvalo by nám to nekonečně dlouhý čas.

1. Úloha

Máme dány 4 množiny A, B, C a D. Pokuste se je seřadit od množiny s největší mohutností. (Tedy od té, která obsahuje největší počet prvků po tu, která má nejmenší počet prvků.)

A = {1; 3; 5; 0,4; 10} *C = {1; 2; 3; 4; 5; ...} = ℕ*

B = {2; 4; 6; 8; 10; ...} *D = ⟨1; 3⟩*[4]

Čtvrtá úloha se zaměřovala na pochopení mohutnosti množin. Žákům byly zadány čtyři množiny a jejich úkolem bylo tyto množiny seřadit od té s největší mohutností po tu s nejmenší mohutností. Jedna žákyně a žák uvedli správné seřazení, i když nevložili žádná znaménka mezi dané označení množin, což jsme po nich ale v zadání nežádali. Žákyně je napsala pod sebe a žák vedle sebe, což však zpochybnilo, zda považovali množiny C a B za stejně mohutné nebo nikoliv. Pro lepší porozumění jsme v zadání úlohy v závorce vysvětlili, že pod pojmem mohutnost rozumíme počet prvků dané množiny. Tento pojem někteří žáci slyšeli pravděpodobně poprvé. Množina A obsahovala pět prvků, druhá množina B obsahovala

[4] Správné seřazení dle zadání by bylo: Nejmohutnější množinou je D, následuje B a C se stejnou mohutností a nejméně mohutnou je množina A.

všechna sudá čísla, třetí množina C znázorňovala obor přirozených čísel a poslední množina D byla uzavřeným intervalem od 1 do 3.

V této úloze jsme se potýkali se dvěma problémy. Prvním byla nutnost vysvětlit pojem mohutnost množiny, což jsme však předpokládali již před začátkem workshopu a vložili odpovídající vysvětlení do zadání úlohy. Druhým problémem bylo porozumění zápisu intervalu. Většina žáků tento pojem neznala, což vedlo k mylnému předpokladu, že množina D je pouze dvouprvková. Během řešení jsme vysvětlili tuto problematiku, takže žáci již odpovídali s potřebnými znalostmi. Je však důležité poznamenat, že porozumění nebylo možné ověřit, a tak se v odpovědích vyskytovaly případy, kde byla množina D stále uváděna jako množina s nejmenší mohutností, neboť byla vnímána jako dvouprvková. Pět žáků tak uvádělo tuto množinu jako množinu s nejmenší mohutností kvůli nepochopení zápisu intervalu.

Zajímavým detailem je, že i přes jasně definované zadání, které žádalo seřazení množin podle počtu prvků od nejpočetnější množiny po nejméně početnou množinu, někteří žáci množiny neseřadili vůbec, nebo je dokonce seřadili opačně. Například jeden žák seřadil dvě množiny a poznamenal, že zbývající dvě mají podle něj stejný nekonečný počet prvků, ale už je neporovnal s předchozími dvěma množinami... Pět žáků uvedlo množinu D jako množinu s nejmenší mohutností. Stalo se tak kvůli nepochopení zápisu intervalu. Ostatní uspořádali množiny správně.

Jedna z žákyň uvedla: *„Množina C je větší než množina B, protože přirozených čísel musí být více než sudých."* Dalších pět žáků považovalo množiny D, C, B za stejně mohutné a nekonečné. Šest žáků považovalo za stejné pouze množiny B, C. Jedna žákyně na tuto úlohu odpověděla následovně: *„V množině A je nejmenší počet prvků. Ostatní množiny mají stejný počet prvků, protože všechna čísla pokračují do nekonečna. Kdyby čísla pokračovala třeba jen do třiceti, množina B by měla největší počet prvků, protože zahrnuje i desetinná čísla. Takto však všechna čísla pokračují do nekonečna (nekonečno=nekonečno).*" V této odpovědi lze vidět, jak žákyně v rámci svých znalostí o nekonečnu a pohledu na porovnání nekonečna pracuje s touto úlohou a snaží se poukázat na jiné řešení při pozměněném zadání úlohy. Představa, že mohutnosti nekonečných množin lze porovnávat a nejsou všechny stejně mohutné, byla pro žáky nová. Na konci workshopu jsme jim ukázali i příklady porovnávání takovýchto množin a podle jejich reakcí a odpovědí bylo jasné, že mají potíže s představou, že nekonečno jedné množiny není „stejné" jako nekonečno jiné množiny. Čtvrtou úlohu bezchybně vyřešili dva žáci. Z hlediska obtížnosti této poslední úlohy jeden žák označil úlohu jako těžkou, čtyři žáci jako lehkou a jedenáct žáků jako střední.

4. Bonusová úloha

V první polovině měřeného úseku dlouhého 2 km jelo vozidlo průměrnou rychlostí 30 km/h. Jakou průměrnou rychlostí musí jet vozidlo ve druhé polovině tohoto úseku, aby byla celková průměrná rychlost vozidla na celém úseku 60 km/h?

Tato bonusová úloha byla dobrovolná, a přesto se všichni kromě jednoho žáka pokusili vytvořit minimálně náčrt nebo zápis. Tuto úlohu čtyři žáci nedopočítali. Šest žáků odpovědělo, že auto by muselo jet průměrnou rychlostí 90 km/h, což je nesprávná odpověď. Čtyři žáci z těchto šesti uvedlo pouze výsledek, bez jakýchkoli výpočtů, zápisů nebo poznámek. Ostatní chybovali v tom, že výslednou rychlost počítali jako aritmetický průměr. Nebrali tak v potaz závislost dráhy na čase. Jediná žákyně z 8. ročníku odpověděla na tuto úlohu správně a to následovně: *„Průměrná rychlost se počítá jako dráha za čas. První polovinu ujel za třicetinu hodiny, co jsou vlastně dvě minuty. Pokud má jet šedesátkou a má ujet dva kilometry, tak je celkově musí ujet za tu třicetinu hodiny, takže by druhou polovinu měl ujet za žádný čas a to nejde.“* Na bonusovou úlohu odpovědělo správně pět žáků. Čtyři žáci označili tuto úlohu jako těžkou, mezi nimi byla i žákyně, která ji vyřešila správně. Pět žáků označilo úlohu jako lehkou a jeden jako střední. Ostatní žáci obtížnost nevyjádřili.

Tip: I tuto úlohu, za kterou lze hledat harmonický průměr, můžeme zdůvodnit prostředky žáka na základní škole. Využijeme pouze rovnosti známé z fyziky, která nám dává do souvislosti rychlost (v), dráhu (s) a čas (t): $t = \frac{s}{v}\,[h]$. Víme, že na první polovině úseku, která měří 1 km, dosáhlo vozidlo průměrné rychlosti 30 km/h, tedy tuto vzdálenost projelo za $\frac{1}{30}h$. Další známá informace pak je, že na celém úseku, který je dlouhý 2 km, má vozidlo dosáhnout průměrné rychlosti 60 km/h. To znamená, že musí celý úsek projet za $\frac{2}{60}h = \frac{1}{30}h$. Tolik mu ovšem zabralo projetí pouze první poloviny úseku. Druhou polovinu úseku by tedy muselo vozidlo projet za nulový čas, a tedy dosáhnout nekonečně vysoké rychlosti. Ani jedno však není fyzikálně možné.

Ústní část

Ústní část probíhala ve třech skupinách, do kterých jsme žáky rozdělili náhodně. Proběhla formou nahrávaných polostrukturovaných rozhovorů se čtyřmi otázkami, které byly inspirované finským výzkumem Hannula et al. (2006). Kromě otázek jsme se inspirovali i vyhodnocováním odpovědí na ně. Ke každé otázce jsme měli namyšlená kritéria, na základě kterých jsme usuzovali, zda se jedná o potenciální chápání pojmu nekonečna, aktuální chápání pojmu nekonečna, nebo zda se žák pohybuje pouze na úrovni práce s konečnými čísly, množinami či objekty. Otázky a kritéria zněly následovně:

1. Jaké největší číslo existuje?

Možné odpovědi a naše kritéria:

a) Neexistuje/nezapisujeme – aktuální nekonečno

b) Nekonečno (symbolický zápis formou ležaté osmičky) – aktuální nekonečno[5]
c) “Nekončící” číslo, např. 999... – potenciální nekonečno
d) “Velmi velké konečné” číslo (např. milión) – není pojem o nekonečnu
e) Jiná, nesprávná odpověď – není pojem o nekonečnu

2. Kolik čísel je mezi čísly 0,7 a 1,2?

Možné odpovědi a naše kritéria:

a) Nekonečně mnoho – aktuální nekonečno
b) “Nekončící” číslo 999... – potenciální nekonečno
c) “Konečné” číslo podle počtu desetinných míst – není pojem o nekonečnu
d) Jiná nesprávná odpověď – není pojem o nekonečnu

3. Jaké je největší číslo, které je ale stále menší než 1? A o kolik se od 1 liší?

Možné odpovědi a naše kritéria:

a) Takové číslo neexistuje – aktuální nekonečno
b) Takové číslo nedokážeme zapsat – potenciální nekonečno
c) Periodické číslo např. 0,999... – potenciální nekonečno
d) “Konečné” číslo, např. 0,99 – není pojem o nekonečnu
e) Jiná, nesprávná odpověď – není pojem o nekonečnu

4. Na tabuli byly načrtnuté dvě úsečky, AB a CD, tak, že délka úsečka AB byla menší než délka úsečky CD. Na ně jsme se odkazovali s otázkou: “*která úsečka obsahuje více bodů?*”

Možné odpovědi a naše kritéria:

a) Obsahuje stejný počet bodů – aktuální nekonečno
b) CD obsahuje více bodů – potenciální nekonečno

Ad 1. Jaké největší číslo existuje?

Tři žákyně v jedné skupině hned v první chvíli reagovaly. *„Takové číslo neznám. Určitě takové existuje, ale já ho neznám.“* říkala jedna z nich. Jiná zas reagovala slovy: *„Trilion, to je největší, jaké znám."* Po otázce, zda se k takovému číslu nedá přičíst číslo jedna a nenajde se větší číslo, reagovala souhlasem a přišla i s ostatními žačkami k výsledku, že největší číslo je nekonečno zapsané formou ležaté osmičky. Další žačka reagovala: *„Bude to nekonečně velké číslo, které nemá konec.“* Je tedy vidět, že některé žákyně neměly vyvinutou představu o nekonečnu. Zbylé žákyně a žáci hned začali přicházet s odpovědí *„ležatá osmička“*, což kategorizujeme jako aktuální pochopení nekonečna. Dvě žákyně v jiné skupině na první otázku bezprostředně reagovaly slovy: *„nekonečno“,* načež třetí žačka oponovala slovy: *„ale nekonečno není číslo“*. Po doplňující otázce, zda se takové číslo dá zapsat, většina opět

[5] Pouze v případě, že žák svůj postoj objasní, aby bylo jasné, že ležatou osmičku nepokládá za číslo, ale rozumí významu na aktuální úrovni.

reagovala slovy: *„ležatá osmička"*. Celkově odpovědi na tuto otázku a následná diskuze mezi žáky naznačovaly, že jejich chápání nekonečna se pohybuje na aktuální úrovni.

Ad 2. Kolik čísel je mezi čísly 0,7 a 1,2?

U druhé otázky byli opět žáci na úrovni aktuálního nekonečna. Jedna žačka svou odpověď na tuto otázku shrnula v odpovědi: *„Když to bude jako úsečka, tak mezi těmi čísly může být nekonečně velké množství desetinných čísel, protože mezi každou mezerou, když to přiblížíme, budou další a další čísla do nekonečna."* Po dotázání se zjistilo, že jim to ukazovala paní učitelka na hodině matematiky v programu GeoGebra. Přesně v tomto případě můžeme vidět, jak může pomoci i menší začlenění této problematiky do výuky k vytvoření představ o nekonečnu v matematice. Jiná žačka zas na druhou otázku reagovala úvahou: *„Nekonečno, jsou tam ta racionální čísla i ta iracionální čísla"*. Další z nich ji komentovala slovy: *„Nekonečno, protože mohu ta jednotlivá čísla zmenšit"*. Dále v argumentaci žákyně pokračovaly tím, že v intervalu se nachází racionální i iracionální čísla, tedy i čísla, která mají nekonečný neperiodický desetinný rozvoj. Stejně tak vnímaly i interval pomocí úsečky, která má nekonečně mnoho bodů. Podle jejich vnímání je logické, že na úsečce o větší velikosti se nachází více bodů. Některé odpovědi lze klasifikovat jako potenciální chápání, avšak většina odpovědí na tuto otázku značí aktuální chápání nekonečna.

Ad 3. Jaké je největší číslo, které je ale stále menší než 1? A o kolik se od 1 liší?

Při této otázce jedna žákyně uvedla, že největší číslo je mínus nekonečno, avšak po skupinové diskuzi přistoupila na názor ostatních žákyň, že je to nesprávné a správná odpověď je 0,9 periodických, což znázorňuje převládání potencionálního chápání nekonečna.

V jiné skupině žaček však zněla bezprostřední odpověď na tuto otázku: *„Nula celá devět periodických, to je ale vlastně 1"*. Jelikož si tady žákyně hned uvědomily, že 0,9 periodických se vlastně rovná 1, začaly vymýšlet různá jiná čísla, jako 0,98 periodických, 0,989999 a tak dále s myšlenkou *„nekonečno devítek (myšleno za zápisem 0,), potom by tam byla osmička, pak zase nekonečno devítek".* Na to začala další diskuse o tom, kam by číslici 8 vlastně zařadily. Většina by ji zařadila jednoduše *„na konec"*. Po zápisu takového čísla však žákyně opět zjistily, že i když takové číslo zapíšou, vždy najdu nějaké větší číslo (pomocí přidání číslice 9 před číslici 8 na o jeden řád vyšší pozici). Stejně tak žákyně diskutovaly o tom, jaké číslo je nejmenší v intervalu (0;1). Obdobně se u žáků objevovaly návrhy na čísla typu 0,00…1. Pokaždé však dovedli najít číslo, které je menší než zapsané číslo. Jejich názory, odpovědi a diskuze tak naznačovaly potenciální chápání nekonečna. Zajímavým dodatkem je, že žádný z žáků neodpověděl, ani se nepokusil odpovědět na druhou část otázky: O kolik se dané číslo liší od čísla 1.

Ad 4. Na tabuli byly načrtnuté dvě úsečky, AB a CD, tak, že délka úsečka AB byla menší než délka úsečky CD. Na ně jsme se odkazovali s otázkou: *„Která úsečka obsahuje více bodů*?“

Na položení této otázky reagovala jedna z žákyň následovně: *„To není možné určit, protože ty body nezabírají žádné místo.“*, a následně se v diskusi shodla s ostatními žákyněmi na názoru, který prezentovala jiná žačka: *„Na obou úsečkách je stejné množství bodů, nekonečné.“* Je zjevné, že tato otázka už byla u některých žáků chápána více z pohledu aktuálního nekonečna. Geometrická představa, se kterou se setkali v hodinách matematiky, měla vliv na jejich odpovědi a pohled, kterým na otázku nahlíželi.

I přesto se většina žáků v jiných skupinách shodla na tom, že na delší úsečce CD musí být více bodů, i přesto, že bodů je na obou úsečkách nekonečně mnoho. Tyto výsledky korespondovaly s tím, co žáci zmiňovali už při druhé otázce. V tomto případě se zas pokusili různá nekonečna porovnávat. Převládal u nich již zmíněný názor, že jedno nekonečno (počet bodů na úsečce CD) musí přeci být větší než to druhé (počet bodů na úsečce AB). Opírali se především o skutečnost, že úsečka CD je delší než úsečka AB. Tomu však oponovala jedna z žaček slovy: *„Obě jsou stejný, když jsou nekonečné ty body, ty jejich počty“.* Tato otázka vyvolala bohatou diskusi, v rámci které, jsme u většiny žáků identifikovali potenciální chápání nekonečna.

Zjištění

Z předchozího šetření vyplynulo, že většina žáků se s pojmem nekonečna již setkala. Žáky nadchlo uvažovat nad danou problematikou v nekonečných množinách. Tento koncept tak považují za zajímavý a důležitý. To se ostatně projevovalo po celou dobu workshopu, kdy žáci byli pozorní, pracovali s nadšením a kladli zajímavé dotazy, které se vždy týkaly pojmu nekonečna.

Odpovědi z písemné i ústní části naznačují, že chápání pojmu nekonečno je u každého žáka na pokročilé úrovni. U většiny žáků převažovalo porozumění nekonečnu na potenciální úrovni, v menšině se objevily i náznaky porozumění pojmu nekonečna na aktuální úrovni. Tato zjištění naznačují, že by se opravdu dal identifikovat i nějaký mezistupeň porozumění, jakým je právě pozice omega. To by ale vyžadovalo další zkoumání.

Závěr

Z šetření vyplynulo, že nadaní žáci individuálně rozumí pojmu nekonečno na různých úrovních. O téma však jeví živý zájem, a je tak vhodné, aby se mu věnovala pozornost již na základní škole – ať už v rámci obohacení učiva, či diferenciace výuky. Pojem nekonečna lze hledat v mnoha tématech matematiky na úrovni základní školy, jak v geometrii či v některých algebraických úlohách, tak i s přesahem do jiných předmětů, například do fyziky. Zavedení tohoto pojmu a bádání po něm už na základní škole pak napomáhá vyhnout se miskoncepcím při práci s nekonečnem, jako třeba uvažování o nekonečnu jako o reálném číslu, či naopak přesvědčení, že pojem nekonečna není vůbec potřeba a podobně.

Výsledky tohoto šetření však nelze zobecňovat. Jedná se totiž o kvalitativní šetření, které bylo provedeno na malém vzorku. Současně je každý (nadaný) žák individuálním jedincem.

I přesto se však stanovený cíl specifického výzkumu povedlo naplnit. Z analýzy porozumění a představ nadaných žáků nižšího stupně víceletého gymnázia o chápání pojmu nekonečna v matematice vyplynulo, jak již bylo avizováno, že u většiny žáků z výzkumného vzorku převažuje potenciální chápání nekonečna, případně by dalším šetřením bylo možné identifikovat pozici omega.

Tyto výsledky tak mohou sloužit jako inspirace pro všechny, kteří nadané žáky vzdělávají v matematice. Jelikož se zdánlivě pro žáky náročné matematické téma na pochopení povedlo přednést ve vhodné podobě, mohou být výsledky i inspirací pro obohacení výuky matematiky na školách.

Použité zdroje

Budínová, I. (2018). *Přístupy nadaných žáků 1. a 2. stupně základní školy k řešení některých typů úloh v matematice*. Masarykova univerzita nakladatelství.

Cihelková, J. (2017). *Nadané dítě ve škole: Náměty do výuky pro celou třídu*. Praha: Portál.

Cihlář, J., Eisenmann, P., & Krátká, M. (2015). *Omega position — a specific phase of perceiving the notion of infinity*. Scientia in Educatione, 6(2), 51–73.

Doucková, Ž., Hamplová, P., Havigerová, J. M., Konárová, K., Křováčková, B. & Splítková, R. (2011). *Co bychom měli vědět o nadání*. Hradec Králové: Gaudeamus.

Gardner, H. (2006). *Multiple intelligences: New horizons*. New York: Basic books.

Hannula, M. S., Pehkonen, E., Maijala, H., & Soro, R. (2006). *Levels of students' understanding on infinity*. Teaching Mathematics and Computer Science, 4(2), 317-337.

Havigerová, J. M. (2011). *Pět pohledů na nadání*. Praha: Grada.

Hříbková, L. (2009). *Nadání a nadaní*. Praha: Grada.

Identifikace a rozvoj matematicky nadaných žáků základních škol. (2023). Nadanyprvnacek.cz. https://www.nadanyprvnacek.cz/

Kuřina, F., & Vondrová, N. (2022). *15 pohledů na školskou matematiku: jak to vidíme*. Pedagogická fakulta, Univerzita Karlova.

MŠMT ČR (2021). Vyhláška 27/2016 Sb. httt://www.msmt,cz/dokumenty/vyhlasky-ke-skolskemu-zakonu

MŠMT ČR (2023). Zákon č. 561/2004 Sb., o předškolním, základním, středním, vyšším odborném a jiném vzdělávání. https://www.msmt. cz/dokumenty/skolsky-zakon-ve-zneni-ucinnem-ode-dne-1-7-2023

Mudrák, J. (2015). *Nadané děti a jejich rozvoj*. České Budějovice: Protisk.

Masarykova univerzita. (2022). Výzkumně ověřený inovativní model identifikace a rozvoje matematicky nadaných žáků základních škol [Research-verified innovative model for identification and development of mathematically gifted elementary school students]. Fakulta Sociálních Studií MU. https://www.fss.muni.cz/vyzkum/resene-projekty/55047

National Association for Gifted Children. (2010). *Standards for gifted and talented education*. Silver Spring, MD: Author.

Ozdemir, D., & Isiksal Bostan, M. (2021). *A Design Based Study: Characteristics of Differentiated Tasks for Mathematically Gifted Students. European Journal of Science and Mathematics Education*, 9(3), 125-144. https://doi.org/10.30935/scimath/10995

Portešová, Š. (2021). Nadanedeti.cz. [3.4.2022] htttts://www.nadanedeti.cz /odborne-zdroje-clanky-jak-definovat-nadani

RVP ZV. (2021). https://www.edu.cz/wp-content/uploads/2023/07/RVP_ZV_2023_zmeny.pdf

Škrabánková, J., Trna, J. a kol. (2013). *Nadaní žáci a jejich učitelé v českých školách: zaměřené na přírodovědu a matematiku*. Brno: Masarykova univerzita.

***

[1]Róbert Glézl je studentem posledního ročníku navazujícího magisterského studia v oboru Učitelství matematiky pro základní školy. V současné době také působí jako učitel na Střední škole umění a designu v Brně. Předmětem jeho zájmu je popularizace matematiky, rekreační matematika a teorie pravděpodobnosti.

[2]Samuel Hána je při studiu na MUNI lektorem matematiky vzdělávací instituce Atelier AMOS a učitelem na Masarykově ZŠ v Brně. V minulosti absolvoval 2 vzdělávací programy v zahraničí – Gaming for boosting school engagement of students with learning disabilities v Lotyšsku a BIP Supporting curriculum through integrated STEAM Education practices v Portugalsku.

[3]Bronislava Melcerová je studentkou posledního ročníku navazujícího magisterského studia na Pedagogické fakultě Masarykovy univerzity. Předmětem jejího výzkumného zájmu je vzdělávání žáků se speciálními vzdělávacími potřebami v předmětu matematika.