Rozvíjíme matematické nadání žáků

náměty pro 1. stupeň základní školy

Editor: Eva Zelendová

NÚV 2017

Rozvíjíme matematické nadání žáků

náměty pro 1. stupeň základní školy

Editor: Eva Zelendová

NÚV 2017

Rozvíjíme matematické nadání žáků

Náměty pro 1. stupeň základní školy

Editor: Eva Zelendová

Autorský tým

RNDr. Hana Lišková	VOŠ pedagogická a Střední pedagogická škola Litomyšl
Mgr. Eva Nováková, Ph.D.	Katedra matematiky PdF MU Brno
RNDr. Eva Zelendová	Národní ústav pro vzdělávání (NÚV)

Recenze

Doc. RNDr. Eduard Fuchs, CSc.	Ústav matematiky a statistiky PřF MU Brno
Mgr. Jana Vaňková	Gymnázium F. X. Šaldy Liberec

Obsah

Úvod

Eduard Fuchs

Škála povinností, které stojí před učitelem na jakémkoliv typu a stupni školy, je široká a ten, kdo v oboru nepracuje, si ji jen obtížně může představit. V každé třídě se sejdou žáci na různém typu intelektuálního a osobnostního vývoje, celkové klima v každé třídě je specifické a učitel by měl umět ke každému žáku přistupovat individuálně. Již tento úkol je obtížný a striktně vzato prakticky nesplnitelný. A to vůbec nezmiňuji řadu dalších úkolů a povinností, které před učitelem stojí.

Jak obtížná je práce se žáky, kteří se vymykají „standardu“ ať už na jedné nebo druhé straně žákovského spektra, není třeba učitelům vysvětlovat. Předpokládám proto, že učitelé přivítají každou metodickou podporu, která jim tuto práci usnadní a poskytne jim náměty pro nejrůznější aktivity vhodné pro právě takové žáky.

Předložená publikace je výbornou pomůckou pro práci s žáky nadanými. Už včasné rozpoznání takového žáka je jedním z velkých problémů, které před učiteli stojí. Jak se v teoretické části můžete dočíst, typů takových žáků je celá řada a jejich projevy mohou být velmi rozličné. Ani zdaleka neplatí, že nadaní žáci jsou jen ti, kteří například vynikají v nejrůznějších soutěžích nebo se aktivně projevují ve třídě. Nadání a povahové vlastnosti a rysy způsobují, že škála možností, v nichž se musí učitelé při identifikaci takových žáků orientovat, je široká. A přitom je zřejmé, že identifikace takového žáka je pouhý začátek obtížné cesty, na niž se učitel s takovým žákem vydává.

Jak s takovým žákem postupovat dále? Zadávat mu další úkoly v rámci standardního učiva nebo mu přidávat problematiku nad rámec RVP? Vést ho soustavně po předem stanovené cestě nebo mu ponechat volnost při volbě tematiky, kterou se bude zabývat? Nechat ho pracovat převážně samostatně nebo ho ve zvýšené míře zapojovat do kolektivu a do skupinové práce?
Na tyto a mnohé další otázky neexistuje jednoznačná a univerzální odpověď. V předložené publikaci však čtenář jistě nalezne alespoň některé z možných odpovědí a současně získá cenné náměty pro práci s nadanými žáky.

1. Identifikace (matematicky) nadaných žáků na 1. stupni ZŠ

Eva Zelendová

Každé dítě je individualita a platí to i o dětech, které vykazují nadprůměrné rozumové schopnosti. *Rozpoznat nadání žáka je s ohledem na jeho další vzdělávání velmi důležité, avšak současně značně nesnadné. Nadaní žáci tvoří velmi nesourodou skupinu a nevykazují žádnou společnou, přesně vymezenou sadu charakteristik. Mohou se odlišovat ve stylu učení, v rychlosti vývoje, v míře tvořivosti a v řadě dalších oblastí. Někteří žáci mohou být nadaní jen v jedné oblasti, jiní v několika oblastech, někteří se mohou dobře ve školním procesu adaptovat a uplatnit, jiní mohou mít v této oblasti problémy, u některých může být rozumový vývoj akcelerován a současně v jiných oblastech opožděn* (Portešová, 2014).

Identifikace nadaných je složitý a dlouhodobý proces. *Zodpovědnost za identifikování nadaných žáků nese škola, konkrétně učitel. Proto by měl být učitel připraven na různé situace a projevy nadaných žáků, aby je mohl správně identifikovat* (Blažková, 2016). Při vyhledávání nadaných žáků mohou učitele ovlivnit charakteristiky, které odpovídají spíše šikovnému, bystrému žákovi. Z pedagogického hlediska je však velmi podstatné bystré a nadané žáky rozlišit.[1] *Nadaný i bystrý žák má své specifické vzdělávací potřeby a vyžaduje tedy odlišný vzdělávací přístup, odlišné podněty a vzdělávací materiály, které odpovídají jeho kognitivní úrovni a znalostem.* (Portešová, 2014).

Na stránkách Centra rozvoje nadaných dětí[2] naleznete následujících 6 základních typů nadaných žáků. Tato typologie nemá sloužit k „zaškatulkování“ jednotlivých žáků ve školní třídě k příslušným typům a kategoriím. Ukazuje, s jakými možnými obecnými typy nadaných žáků se může učitel nejčastěji setkat.

1. <u>Úspěšné nadané dítě</u>
   Učitel toto dítě často správně identifikuje. Je to dítě, které se velmi dobře učí, má samé jedničky, dovede jednat s dospělými, je poslušné a nemá žádné problémy s chováním.
2. <u>Vysoce tvořivé nadané dítě</u>
   Takové dítě stále vymýšlí něco nového, experimentuje. Je pro ně obtížné přizpůsobit se pevnému školnímu systému. Opravuje dospělé, chce měnit školní pravidla, špatně se ovládá. Chování takových dětí bývá velmi konfliktní.
3. <u>Nadané dítě maskující své schopnosti</u>
   Takové dítě obvykle schovává, maskuje své skutečné, často nadprůměrné schopnosti jen proto, aby bylo přijato ostatními spolužáky. Obecně platí, že tyto děti mívají velmi nízké sebevědomí i sebehodnocení a často jsou velmi frustrovány. Tento typ se často týká nadaných dívek, zejména na počátku střední školy.

[1] Tabulku rozdílů mezi mimořádně nadaným a bystrým žákem naleznete v BLAŽKOVÁ, R., BUDÍNOVÁ, I., DURNOVÁ, H., VAŇUROVÁ, M. *Matematika pro bystré a nadané žáky. Úlohy pro žáky 1. stupně ZŠ, jejich rodiče a učitele.*
[2] http://www.nadanedeti.cz/pro-ucitele-typologie-deti

4. <u>„Ztroskotalé, odpadlé“ nadané dítě</u>
   Dítě tohoto typu stojí často v opozici proti všem a všemu. Protestuje proti dospělým, rodičům i učitelům, kamarádům, sourozencům, proti celé společnosti. Je stále nespokojeno a dává to najevo. Také ono má snížené sebevědomí a zároveň má pocit, že mu nikdo nerozumí. Buď vyrušuje, nebo zcela již rezignovalo, ztratilo motivaci a odmítá jakoukoliv školní činnost. Nedělá školní úkoly a nepřipravuje se. Jeho školní výkony bývají velmi nevyrovnané, hodnocení průměrné až podprůměrné.
5. <u>Nadané dítě s určitou vývojovou poruchou (nejčastěji se specifickou vývojovou poruchou učení)</u>
   Tyto děti bývají velmi nadané, ale jejich školní výsledky tomu zdaleka neodpovídají. Jejich řešení bývají často nedokončena, nejsou schopny pracovat pod časovým tlakem a bojí se jakéhokoliv selhání. Většinou jsou hodnoceny jako žáci s průměrnými schopnostmi.
6. <u>Autonomní nadané dítě</u>
   Toto dítě bývá velmi nezávislé, vystačí si samo se sebou. Je schopno riskovat, má velmi pozitivní sebehodnocení a využívá školní vzdělávací systém tak, aby z něj samo měl co nejvíc užitku.

Za účelem identifikace nadaných žáků vznikají různé škály základních projevů nadaného žáka. Velmi spolehlivou metodu vypracovala po třicetiletém bádání L. Silvermanová (Colorado). Škála je relativně snadná a univerzální, použitelná i v našich podmínkách.[3] *Pokud žák prokáže více než tři čtvrtiny těchto vlastností, je pravděpodobné, že je nadané* (Blažková, 2016).

Konkretizace pro matematicky nadaného žáka obsahuje např. (Novotná, Zhouf, 2005):

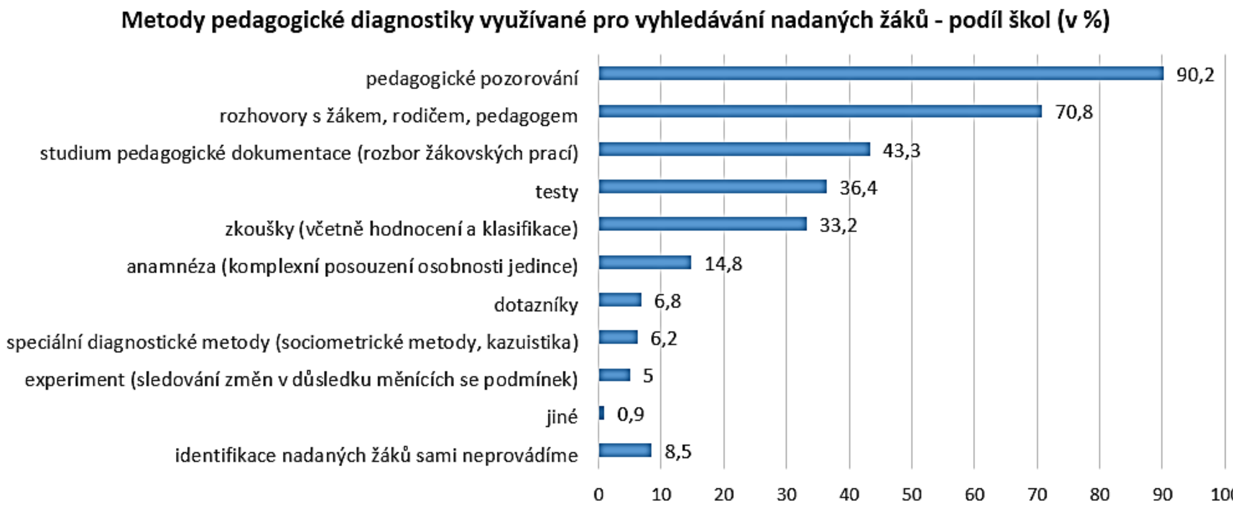
- *„vnímavost a zvědavost“ v matematice*
- *rychlé pochopení matematických myšlenek*
- *tvořivé a pružné řešení matematických úloh*
- *schopnost využívat získané vědomosti v jiných matematických situacích*
- *vnitřní motivace, zájem o matematiku*
- *vyšší stupeň samostatnosti při řešení úloh*
- *vyšší schopnost soustředit se na problém a chuť vyřešit ho*
- *navrhování různých strategií řešení úloh.*

V říjnu 2016 zveřejnila Česká školní inspekce tematickou zprávu *Vzdělávání nadaných, talentovaných a mimořádně nadaných dětí a žáků*. V době realizace šetření (září 2015 až červen 2016) nebyly sice ve školském zákoně ani v navazujících prováděcích předpisech pojmy mimořádné nadání a nadání přesně definovány, přesto vykázaly základní školy v České republice 992 mimořádně nadaných žáků.[4] V rámci inspekční činnosti bylo mimo jiné zjišťováno, jak mají školy zapojené do šetření (975 základních škol) nastavený systém vyhledávání a identifikace

[3] Škálu charakteristik nadání naleznete v BLAŽKOVÁ, R., BUDÍNOVÁ, I., DURNOVÁ, H., VAŇUROVÁ, M. *Matematika pro bystré a nadané žáky. Úlohy pro žáky 1. stupně ZŠ, jejich rodiče a učitele.*

[4] Tematická zpráva neuvádí zjištění samostatně pro žáky 1. stupně ZŠ a není zaměřena přímo na matematické nadání žáků.

nadání. Rozvoj nadání a péče o nadané žáky byl v 88,5 % těchto škol součástí strategického plánování školy a většina škol měla rozvoj nadání a péče obsažen ve školním vzdělávacím programu. Pouze necelých 9 % základních škol uvedlo, že identifikaci nadaných žáků sama neprovádí. Jaké metody pro pedagogickou diagnostiku využívaly oslovené školy a jaké je zastoupení těchto metod, ukazuje následující graf:



Na závěr pro úplnost uveďme obecnou definici nadaného a mimořádně nadaného žáka obsaženou v paragrafu 27 vyhlášky č. 27/2016 Sb., o vzdělávání žáků se speciálními vzdělávacími potřebami a žáků nadaných, která je účinná od 1. září 2016:

(1) Za nadaného žáka se pro účely této vyhlášky považuje především žák, který při adekvátní podpoře vykazuje ve srovnání s vrstevníky vysokou úroveň v jedné či více oblastech rozumových schopností, v pohybových, manuálních, uměleckých nebo sociálních dovednostech.

(2) Za mimořádně nadaného žáka se pro účely této vyhlášky považuje především žák, jehož rozložení schopností dosahuje mimořádné úrovně při vysoké tvořivosti v celém okruhu činností nebo v jednotlivých oblastech rozumových schopností, v pohybových, manuálních, uměleckých nebo sociálních dovednostech.

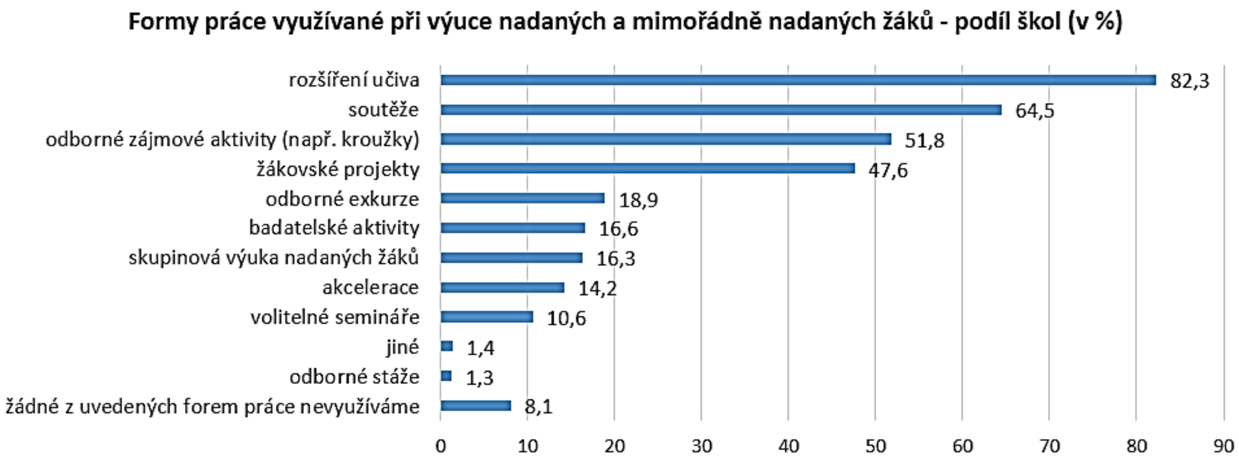
2. Edukační potřeby nadaných žáků

Eva Zelendová

Nadaní žáci jsou typičtí svými projevy, ať už v oblasti kognitivní či socioemocionální. Na tyto potřeby je třeba reagovat a vytvářet pro jejich respektování vhodné podmínky. Mezi specifické edukační potřeby nadaných patří např. (Jurášková, 2003):

- *Maximální osvojení základních zručností a pojmů.*
- *Učební aktivity v přiměřeném tempu a úrovni.*
- *Rozvoj kreativního myšlení a řešení problémů.*
- *Rozvoj konvergentních schopností, zejména v logické dedukci a konvergentním řešení problémů.*
- *Stimulace představivosti, obrazotvornosti a prostorových schopností.*
- *Rozvoj sebevědomí a akceptace vlastních schopností, zájmů a potřeb.*
- *Podpora tvorby a plnění přiměřených cílů a aspirací.*
- *Přístup k různým oblastem studia, umění a profesí.*
- *Rozvoj nezávislosti, ale disciplíny v učení.*
- *Poskytování příležitostí interakcí s jinými nadanými žáky.*
- *Poskytování množství informací o rozličných tématech.*
- *Podpora čtení a nabídka přístupu k různým informačním zdrojům.*

Následující graf zachycuje odpovědi na otázku „Jaké formy práce využíváte při výuce nadaných a mimořádně nadaných?“ při šetření ČŠI ve školním roce 2015/2016 (ČŠI Tematická zpráva, 2016).



Sledováním edukační práce v různých hodinách matematiky i na základě vlastních zkušeností lze nabízenou škálu obohatit dalšími strategiemi (Kaslová, 2013):

- *více téhož, co ostatní (práce s kvantitativním minimem)*
- *totéž co ostatní, ale v kratším čase (práce v časovém limitu)*
- *hledání (žákovi dosud neznámé) metody*
- *řešení úlohy za specifických podmínek (minimálně dvěma různými způsoby, nejekonomičtěji…)*
- *zobecnění cvičeného, nastudovaného*

- *korespondenční semináře k vybranému tématu, zohledňující specifika řešitele*
- *izolované úlohy (tzv. oříšky, lahůdky…)*
- *zadání i řešení úlohy v cizím jazyce*
- *koordinace práce ve skupině*
- *komplexně pojaté téma – průřezově napříč obory.*

Na výše uvedené požadavky na výuku nadaných žáků reaguje tzv. obohacující kurikulum, které by mělo obsahovat pět obecných znaků (Machů, Kočvarová, 2013):

1. *Výzva, zahrnující vyšší kognitivní cíle a hlubší úroveň učebních stylů.*
2. *Volba, jako otevřená možnost řešit úkoly kreativně, problémově, bez předepsaných „stropů" ve vlastním rozvoji.*
3. *Zájem, který je zvyšován nabídkou zajímavých a motivujících úkolů.*
4. *Prožitek a osobní zaujetí, které jsou podporovány adekvátními didaktickými prostředky.*

Obohacení je rozšíření a prohloubení učiva i nad rámec běžného kurikula. Nadaný žák absolvuje vyučovaný tematický celek společně se svými vrstevníky, nepřekračuje svůj ročník, ale je mu nabízena možnost pracovat na obohacujících aktivitách. *Jeho cílem je podpora tvořivého myšlení, schopnosti řešení problémů, používání vyšších úrovní myšlení a rozvoj samostatnosti, iniciativy a sebekontroly* (Machů, Kočvarová, 2013).

Ve vyučování matematice se za jeden z důležitých nástrojů stimulace vyšších poznávacích funkcí považuje matematická úloha. *Mezi nestandardní matematické úlohy na 1. stupni ZŠ patří zejména kombinatorické, diofantovské, problémové, divergentní a neúplně zadané úlohy. Následující ukázka úloh je inspirována korespondenčním matematickým seminářem Malynár.*[5] (Štefková, 2012).

Soubor nestandardních matematických úloh, úloha 1
V ZOO potřebovali rozmístit zvířata do klecí. Je však známo, že: 1) **V žádné kleci nesmí být počet masožravců větší než počet býložravců.** Věčně hladoví masožravci by se spojili proti býložravcům a udělali by si hostinu. 2) **V žádné kleci nesmí být dvě různě početné skupiny odlišných druhů masožravců.** Když jsou v kleci dvě různé skupiny masožravců a jedna z nich je početnější, tak větší skupina napadne menší. 3) **Počet samců a samic stejného druhu v každé kleci musí být buď stejný, nebo tam může být jen jedno pohlaví** (aby měl každý partnera a aby nikdo nikomu nezáviděl, že partnera nemá). 4) **Aspoň jedna klec musí být obydlena jen býložravci a aspoň jedna jen masožravci.** ZOO vlastní 15 lvů, 13 lvic, 11 vlků, 20 vlčic, 42 jelenů, 23 laní a k dispozici má 5 klecí. a) Můžeme umístit zvířata do 5 klecí tak, aby byly splněny současně všechny 4 podmínky?

[5] Malynár je korespondenční matematický seminář pro žáky 4.- 6. ročníku ZŠ, mohou se zapojit i žáci mladší. Každý půlrok se začíná znovu s nulovým počtem bodů. Seminář organizuje Združenie STROM ve spolupráci s gymnáziem Poštová v Košicích. Úlohy a jejich řešení naleznete na https://malynar.strom.sk/sk/casopisy/sutaze/2/.

b) Hygienická kontrola omezila kapacitu každé klece na 30 zvířat a ve stejný den do ZOO přivezli další 4 vlčice a 10 medvídků koala (6 samečků a 4 samičky). Můžeme umístit zvířata do 5 klecí tak, aby byly splněny všechny 4 podmínky i omezení hygienické kontroly?

Možné řešení s komentářem

Žáci zkouší různé možnosti obsazení pěti klecí a kontrolují, zda platí dané podmínky.

a) Zvířata můžeme umístit do 5 klecí např. následujícím způsobem:
   1. klec – 23 jelenů a 23 laní
   2. klec – 19 jelenů a 9 vlčic
   3. klec – 11 vlků a 11 vlčic
   4. klec – 13 lvů a 13 lvic
   5. klec – 2 lvi

b) Zvířata můžeme po změněných podmínkách umístit do 5 klecí např. tímto způsobem:
   1. klec – 4 páry koal a 19 jelenů
   2. klec – 13 lvic, 8 párů jelen-laň a 1 koala (samec)
   3. klec – 11 vlků a 8 párů jelen-laň
   4. klec – 15 lvů, 7 párů jelen-laň a 1 koala (samec)
   5. klec – 24 vlčic

Soubor nestandardních matematických úloh, úloha 2

Jednoho dne měla policie zajímavý případ. V noci se někdo pokusil vyloupit banku, omylem však spustil alarm. Nestihl utéct, tak se zamknul v trezoru banky. Policie tedy musí zjistit, jaký je kód trezoru. Úředníci banky jim poskytli tyto údaje:

(1) Kód je čtyřciferné číslo dělitelné čtyřmi.
(2) Kód je dělitelný pěti a hodnota největší číslice je dělitelná třemi.
(3) Kód obsahuje také číslice 2 a 3, které jsou vedle sebe.
(4) Číslice jsou v kódu uspořádány sestupně.

Kolik čísel splňuje všechny tyto podmínky? Která to jsou?

Možné řešení s komentářem

Při řešení žáci využívají pravidla pro dělitelnost a jejich aplikací zajišťují splnění podmínek úlohy:

Z (2) plyne, že hledané číslo má na konci 0 nebo 5 a největší číslice je 9, 6, nebo 3.
Z (1) plyne, že hledané číslo má poslední dvojčíslí dělitelné čtyřmi.
Z (3) a (4) plyne, že číslice 2 a 3 tvoří v čísle skupinu 32.
Kdyby byla skupina 32 na začátku hledaného čísla, musela by být na třetí pozici 1 a na konci 0. Číslo 3210 však není dělitelné 4.
Proto bude skupina 32 na druhém a třetím místě a vzhledem k dělitelnosti čtyřmi na konci bude 0. Stačí zjistit, zda čísla 9320 a 6320 jsou dělitelná 4.

9320 : 4 = 2 330 a 6320 : 4 = 1 580.

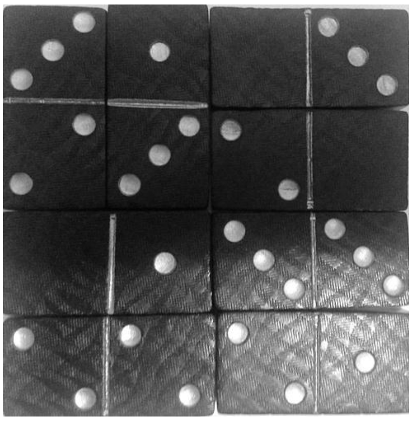
Zadání úlohy vyhovují dvě čísla 9320 a 6320.

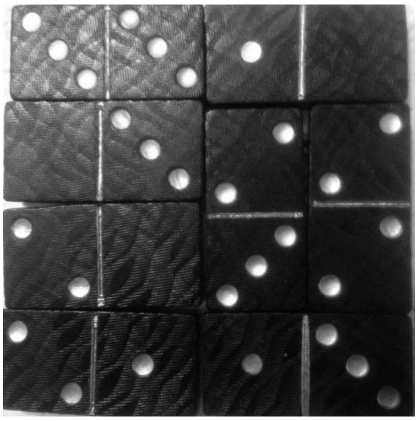
Soubor nestandardních matematických úloh, úloha 5

Honzík našel v parku osm dílků ze hry Domino, na kterých byly hodnoty 0-1, 0-2, 0-3, 1-2, 1-3, 2-2, 2-3, 3-3. Sedl si na zem a začal skládat dílky do čtverce s rozměry 4 x 4.
Dají se tyto dílky složit do čtverce tak, aby počty teček v jednotlivých řádcích a sloupcích byly stejné?
(Dílky mohou být položeny svisle nebo vodorovně.)

Možné řešení s komentářem

Žákům pomůže při hledání odpovídajícího umístění dílků Domina manipulace se skutečnými dílky nebo s jejich reprezentací např. z papíru.
Dvě možná řešení zachycují následující fotografie.





3. Učitel jako spolutvůrce obohacujícího kurikula

Eva Zelendová

Pro kvalitní vzdělávání nadaných žáků je základním předpokladem kvalitní pedagog. Na něm leží největší část zodpovědnosti za rozvoj nadání žáka. Aby tuto úlohu zvládl, musí mít příslušné vědomosti a zručnosti. Existuje řada precizně definovaných rozsáhlých seznamů specifických požadavků na profesi učitele nadaných žáků. Uveďme si jako příklad kritéria, která vznikla na základě výzkumu ve státě Maryland. Mezi charakteristiky ideálního učitele nadaných žáků patří (Machů, Kočvarová, 2013):

- *vědomosti o kognitivních a emocionálních potřebách nadaných a talentovaných jedinců*
- *výborné znalosti v oboru i znalosti výukových metod*
- *využívání technických prostředků pro výuku*
- *schopnost vštěpovat žákům zvídavost a nadšení pro učení*
- *nevyčerpatelná energie, nadšení, nápaditost*
- *otevřenost inovacím a schopnost přijímat odlišné kreativní myšlení*
- *vhodný postup při komunikaci s nadanými jedinci*
- *ochota nepřetržitě se vzdělávat s cílem dosáhnout profesionálních kompetencí.*

Učitel by při vzdělávání nadaných žáků neměl čekat, až žák sám dostane nějaký tvořivý nápad. Měl by promyšleně a systematicky vytvářet obohacující kurikulum, které by vedlo žáky k tvořivému myšlení. Proto už při studiu na vysoké škole by se měli budoucí učitelé seznamovat např. s různými strategiemi řešení matematických úloh, měli by se naučit didakticky zpracovat a popsat metodický postup procesu řešení úlohy.

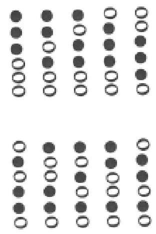
Prezentace původních výsledků vědecké a odborné práce v oblasti matematiky a didaktiky matematiky, které jsou zaměřené na využití v přípravě učitelů nejmladších žáků, jsou obsahem konference s mezinárodní účastí *Elementary Mathematics Education* (EME), kterou pořádá PdF UP v Olomouci. Konference je určena jak pro pracovníky fakult připravujících učitele primární školy, tak i pro učitele z praxe. Na adrese http://eme.upol.cz/historie.html jsou zveřejněny sborníky se spoustou zajímavých nápadů využitelných přímo ve výuce. Příkladem mohou být následující úlohy, které byly inspirovány článkem *Podpora matematicky nadaných žáků v rámci inkluzivního vzdělávání na základní škole* (Blažková, Budínová, 2014).

EME 2014, Úlohy pro podporu matematicky nadaných žáků, úloha 2.
Když dvě různá čísla sečteš, dostaneš 1 000. Když tato čísla odečteš, dostaneš 666. Která jsou to čísla?
Možné řešení s komentářem
Hledaná čísla jsou 833 a 167. Žáci k nim zpravidla dospějí metodou pokus-omyl.

EME 2014, Úlohy pro podporu matematicky nadaných žáků, úloha 7.

Bětka má tři bílé a tři černé kuličky a chce je všechny navléct na svislou tyčku. Nakresli co nejvíce možností, jak mohou být kuličky navlečeny. Barvy kuliček se mohou různě střídat.

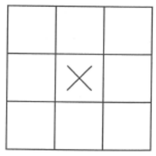
Možné řešení s komentářem



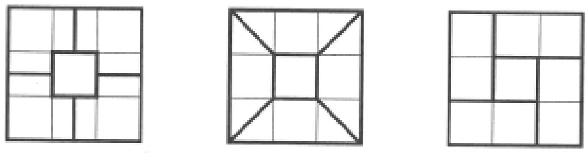
Pokud zaměníme bílé a černé kuličky, získáme dalších 10 řešení. Celkem je tedy 20 možností.
Žáci většinou hledali řešení náhodně, nevyužili systém ve vyhledávání všech možností. Pokud systém využili, zpravidla neuvedli všechna řešení. Buď k několika řešením napsali „atd.“, nebo např. „nechce se mi to všechno psát“.

EME 2014, Úlohy pro podporu matematicky nadaných žáků, úloha 8.

Na obrázku je nakreslen čtverec, který je rozdělen na 9 shodných čtverečků. Když prostřední čtvereček vystřihneme, můžeme zbytek čtverce rozdělit na čtyři shodné části. Nakresli je.



Možné řešení s komentářem



Při řešení úlohy žáci postupovali kreativně, hledali různá řešení. Mnoho žáků však uvedlo pouze rozdělení na dvě shodné části.

EME 2014, Úlohy pro podporu matematicky nadaných žáků, úloha 10.

Výměnný obchod má následující pravidla:

- Dvanáct tužek vyměníš za tři pera.
- Dvě pera vyměníš za šest fixů.
- Tři fixy vyměníš za jeden bloček.

Za kolik tužek je jeden bloček?

Možné řešení s komentářem

1 pero vyměním za 4 tužky.
1 pero vyměním za 3 fixy.
1 bloček vyměním za 3 fixy.
3 fixy vyměním za 1 pero.
1 pero vyměním za 4 tužky.
Tedy 1 bloček vyměním za 4 tužky.

Úloha se nadaným žákům velmi líbila. Dokázali ji správně vyřešit úvahou.

4. Úlohy vhodné pro nadané žáky na 1. stupni ZŠ, význam žákovských řešení

Hana Lišková

V praxi je ověřeno, že žák s matematickým nadáním bývá většinou zaměřen na vnímání hloubky problému, a nikoliv na rychlost (Fr. Kuřina, 2014). Nadaný žák hledá různé cesty k vyřešení úlohy a zkoumá, zda našel všechna možná řešení. Žák se problémem skutečně zabývá, mnohdy se ke svému postupu vrací a hledá efektivnější variantu. Učitel musí být připraven nabídnout nadaným žákům náměty k uplatnění těchto schopností a dovedností. Správný výběr aktivit a úloh je pro pedagoga při práci s nadanými žáky prioritní. V této kapitole připomeneme několik důležitých aspektů této pedagogické činnosti.

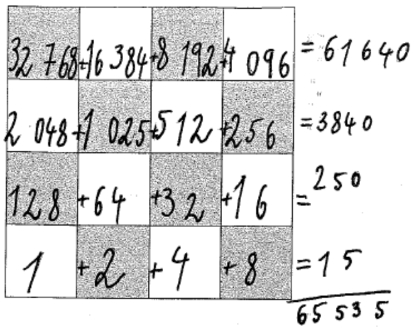
Kurikulární rámec výběru úloh

Pro učitele na prvním stupni ZŠ je závazný Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (RVP ZV), který vzdělávací oblast Matematika a její aplikace rozděluje do čtyř tematických okruhů: Číslo a početní operace; Závislosti, vztahy a práce s daty; Geometrie v rovině a prostoru a Nestandardní aplikační úlohy a problémy. Každý z těchto okruhů umožňuje rozvíjet nadání žáků, největší potenciál je nutné spatřovat v okruhu posledním. V *Metodických komentářích ke Standardům pro základní vzdělávání* (Fuchs, Zelendová, 2015)[6] byly do kapitoly Nestandardní aplikační úlohy a problémy zařazeny osvědčené úlohy, které vytvářejí prostor pro různé alternativy řešení nebo provokují žáky k různým schematickým či grafickým zpracováním postupu řešení. K ilustraci použijme následující úlohu.

Metodické komentáře ke Standardům pro základní vzdělávání, úloha 9
Patrik zkusil pokládat fazole na šachovnicovou dlažbu 4 x 4 tak, že na první pole položil jednu fazoli a na každé následující políčko dvojnásobek předchozího počtu. Nestačil se divit. Kolik fazolí by potřeboval, kdyby chtěl tuto dlažbu zaplnit podle daného pravidla?
Autentické žákovské řešení s komentářem
Bystří žáci na 1. stupni ZŠ rádi počítají s velkými čísly. Jestliže učitel žáky před výpočtem požádá o odhad, uvidí, zda žák bezmyšlenkovitě tipuje nebo se snaží racionálně s odhadem pracovat (např. začne určovat počet fazolí alespoň v první řadě). Odhad většinou selhává, o to překvapivější je výsledek. Tento moment může řadu bystrých žáků přimět k tomu, že se o matematiku začnou více zajímat.

[6] Další informace o *Metodických komentářích ke Standardům pro základní vzdělávání* v kapitole 8 Podpora Národního ústavu pro vzdělávání.

Žákovské řešení ukazuje, jak žák 5. ročníku ZŠ pracuje s mezisoučty. I když je v jednom políčku tento mezisoučet chybný, je výsledek správný (zřejmě chyba při přepisování řešení „načisto“). Je třeba žáka pochválit za systematický způsob řešení.



Na závěr je vhodné vyzvat žáky k diskusi, zda je reálné tento experiment na šachovnicové dlažbě dokončit, popř. která část experimentu je reálná. Úloha je pro rozvoj nadání vhodná, jednoduchý algoritmus zajistil správné vyřešení úlohy a přinesl nepředvídatelný výsledek. Úloha může být pro žáky doslova fascinující.

Autentická žákovská řešení

Výše uvedené žákovské řešení je srozumitelné. Učitelé prvního stupně ho v rámci vzdělávacích seminářů během let 2015–2016 označovali za přehledné a vhodné pro daný věk. Přiznávali, že při frontálním řešení úlohy (pro které ovšem tato úloha vhodná není) by tento způsob používali a žáky k takovému zápisu řešení vedli. Učitel si však musí uvědomit, že předem určená forma zápisu řešení úlohy, která má rozvíjet nadání, může bohužel vést žáky k nežádoucímu formalismu. *Je naprosto nezbytné, aby si žák při řešení těchto úloh vytvořil svůj záznam, který by však měl být srozumitelný nejen jemu, ale i ostatním žákům* (Hejný, 2014).

Ať učitel úlohu sám vymýšlí nebo ji přebírá do výuky z různých zdrojů, je velmi žádoucí, aby se zamyslel nad tím, jak budou úlohu pravděpodobně řešit žáci. Je inspirativní porovnat toto očekávané řešení s autentickými postupy žáků, zvláště pak u úloh, které poskytují různé cesty při řešení. V následující úloze, která je převzata z *Korespondenčního semináře Matýsek*[7], nejprve uvádíme očekávaná řešení, která byla získána od účastníků semináře pro učitele 1. stupně ZŠ. Poté následují komentovaná autentická žákovská řešení.

---

[7] *Korespondenční seminář Matýsek*, který je určen žákům 4. a 5. tříd základních škol, dovršil v roce 2016 dvacet let nepřetržitého trvání. Do jubilejního 20. ročníku bylo zapojeno 200 žáků z 36 základních škol z Litomyšle a okolí. Pro korespondenční seminář jsou vybírány a upravovány učiteli a žáky Pedagogické školy v Litomyšli úlohy z oblasti aritmetiky, kombinatoriky, geometrie, topologie apod. *Tyto úlohy pomáhají vytvářet dobrý vztah žáků mladšího školního věku k matematice a dávají příležitost bystrým a nadaným žákům. Zkušenosti ukazují, že úlohy jsou inspirací i pro učitele, kterým zároveň pomáhají nadané žáky lépe identifikovat* (Lišková, 2016). Poslední tři ročníky jsou dostupné na http://www.vospspgs.cz/matematicky-korespondencni-seminar-matysek.

Korespondenční seminář Matýsek, 2015-2016, série 2., úloha 1.

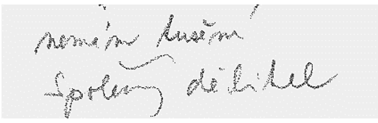
Víte, za kolik let bude strýc třikrát starší než Matýsek, jestliže je Matýskovi dnes 11 let a strýci 59 let?

Očekávaná žákovská řešení s komentářem

Učitelé 1. stupně ZŠ očekávali řešení žáků v podobě tabulky nebo postupného vypisování věku Matýska a strýce v navazujících letech. Úloha se jim jevila jako standardní a způsob řešení jednoznačný. Objevil se názor, že je možné, že bude žák používat odhad a nebude vypisovat všechny situace v jednotlivých letech. Tento předpoklad byl správný, skutečně se taková řešení objevila.

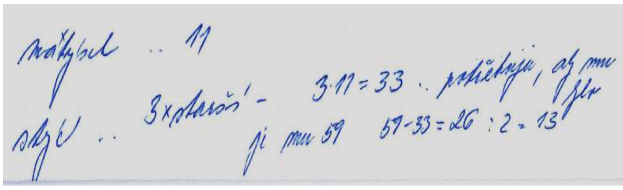
Pro ilustraci uveďme některá předpokládaná řešení:

Učitel A



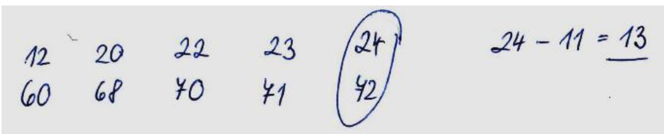
Učitel má zřejmě z matematiky „respekt“ a nemá tudíž odvahu napsat své řešení. Je možné, že řešení ve formě postupného vypisování stavu věku Matýska a strýce a postupné hledání řešení připadá tomuto učiteli nevhodné, a proto raději odpoví, že nemá tušení. Tato spekulace se nepotvrdila při následné diskusi, kdy se učitel A vyjádřil, že už si nepamatuje, jak se takové úlohy řešily.

Učitel B



Učitel řeší úlohu obdobně jako většina žáků, navíc využívá aproximaci, zkracuje zápis, což zvyšuje efektivitu řešení. V zápise chybí některé kroky, které učitel provádí zpaměti. Je však pravděpodobné, že tento učitel bude žáky při řešení správně podporovat, korigovat je a že bude metoda řešení v jeho případě velmi obdobná myšlenkovým postupům žáků. Práce s touto úlohou by měla velký smysl pro vytváření správných postojů k řešení slovních úloh a výuka by mohla být efektivní.

Učitel C



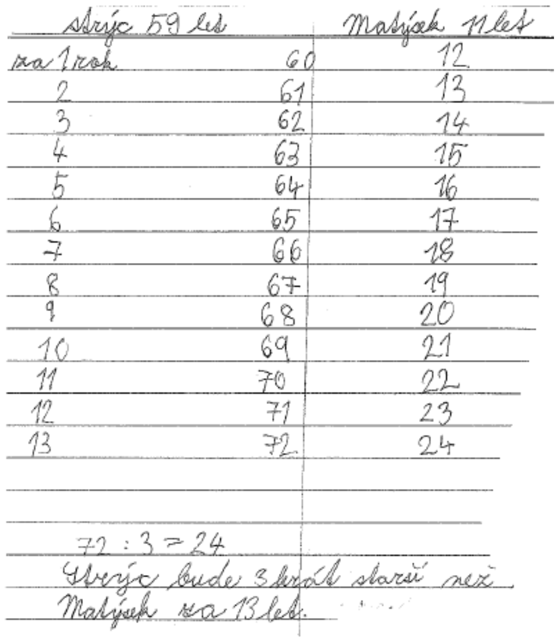
Učitel C předložil osobitý způsob řešení a zápisu. Úvaha je správná, ale neztotožňuje se s většinovým způsobem žákovských řešení. Učitel má vhled do řešení této úlohy a je v pořádku, že pracuje osobitým způsobem. Otázkou však je, zda bude schopen respektovat mnoho jiných způsobů žákovských řešení.

Bylo by velmi cenné, kdyby takový způsob řešení byl představen ve vztahu žák-žák. V takovém případě by se u žáků velmi obohatil rejstřík možných řešení.

Autentická žákovská řešení s komentářem

1) Žákovská řešení pomocí výpisu věku Matýska a strýce:

Žák A

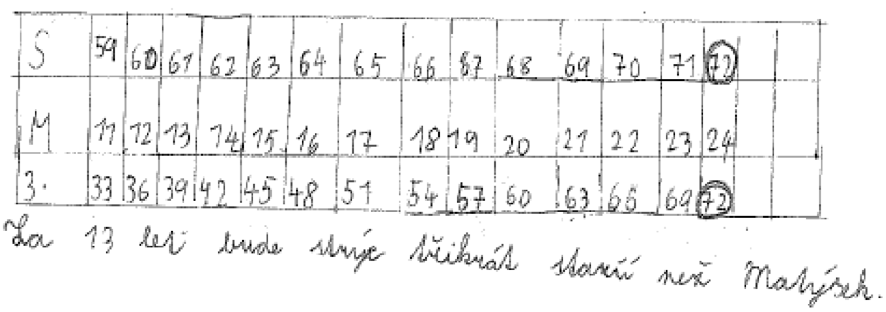


	strýc 59 let	Matýsek 11 let
za 1 rok	60	12
2	61	13
3	62	14
4	63	15
5	64	16
6	65	17
7	66	18
8	67	19
9	68	20
10	69	21
11	70	22
12	71	23
13	72	24

72 : 3 = 24
Strýc bude 3krát starší než Matýsek za 13 let.

Žák nezapomněl provést zkoušku, zda je skutečně výsledný věk dělitelný třemi. Ověření správnosti řešení je cenné a ukazuje na řešitelskou vyzrálost žáka a jeho důslednost.

Žák B



S	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
M	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
3·	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60	63	66	69	72

Za 13 let bude strýc třikrát starší než Matýsek.

Žák do tabulky přidal třetí řádek, kde si vypisuje požadované trojnásobky věku Matýska a kontroluje, kdy se jeho výsledný věk bude shodovat s věkem strýce. Tak získá hledané řešení. Závěrečný úsudek formuluje bez zápisu výpočtu, zřejmě počítá zpaměti.

Žák C

Vaši úlohu budu řešit a) tabulkou.

roky	věk Matýska	věk strýce	je s. 3x starší?
0	11	59	ne.
1	12	60	ne.
2	13	61	ne.
3	14	62	ne.
4	15	63	ne.
5	16	64	ne.
6	17	65	ne.
7	18	66	ne.
8	19	67	ne.
9	20	68	ne.
10	21	69	ne.
11	22	70	ne.
12	23	71	ne.
13	24	72	ano.

Žák kontroluje na každém řádku, zda výsledek odpovídá zadání, nebo je třeba hledat další variantu věku Matýska a strýce.

Žák D

V následující ukázce řešení se setkáváme s metodou, kdy žák využívá manipulaci s pomocnými objekty (dřívky). V úvodu svého řešení manipulativní způsob řešení žák D popisuje.

Vezmu si dřívka na jednu kupičku dám 59 na druhou 11, postupně po 1 přidávám na každou kupičku počítám si pořád kolik let už uběhlo až je na jedné 3krát více než na té druhé.

M	S	3x věk
11	59	33
12	60	36
13	61	39
14	62	42
15	63	45
16	64	48
17	65	51
18	66	54
19	67	57
20	68	60
21	69	63
22	70	66
23	71	69
24	72	72

Odpověď:

Strýc bude třikrát starší než Matýsek za 13 let.

Žák E

Žák výpis věků zkracuje, zřejmě pouze pro potřebu stručně zapsat řešení, nikoli pro potřebu vlastního řešení. V průběhu řešení zřejmě pracoval se všemi hodnotami postupně.

Matýsek 11
Strýc 59

Matýsek	Strýc
$11 \cdot 3 = 33$	59
$12 \cdot 3 = 36$	60
⋮	⋮
$24 \cdot 3 = 72$	72

Strýc bude 3x starší než Matýsek za 13 let.
Matýsek $11 + 13 = 24$ Strýc $59 + 13 = 72$
$24 \cdot 3 = 72$ $72 : 3 = 24$

Žáci F a G také využívají systematické vypsání věku Matýska a strýce, neuvádějí však počáteční stav a začínají od následujícího roku, kdy je strýci 60 let.

Žák F

M 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24

S 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72

Strýc bude 3x starší než Matýsek za 13 let.

Žák G

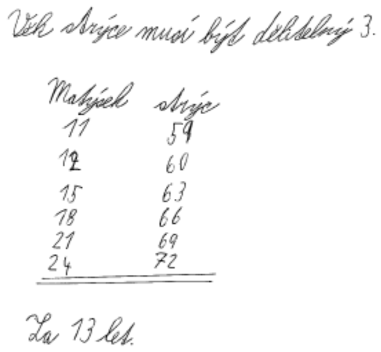
Strýc	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
Matýsek	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Rok		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Za 13 let.

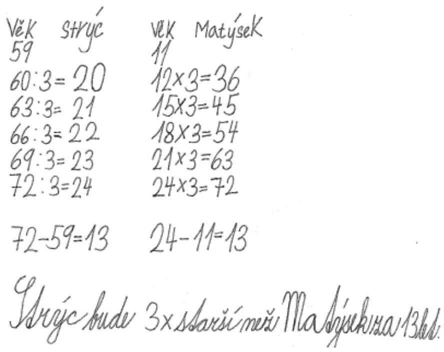
Velmi zajímavá jsou následující řešení žáků, ve kterých se objevují některé neobvyklé kroky.

Žák H

Žák využívá při svém řešení znalosti o dělitelnosti. Možnosti řešení ověřuje pouze pro násobky tří pro případ, že jsou větší než 59, tedy pro 60, 63, 66, 69 a 72. Provádí tedy jistý výběr, klasifikaci, a tak je jeho řešení efektivní. Chybí zde zápis pro výpočet vedoucí k závěru.



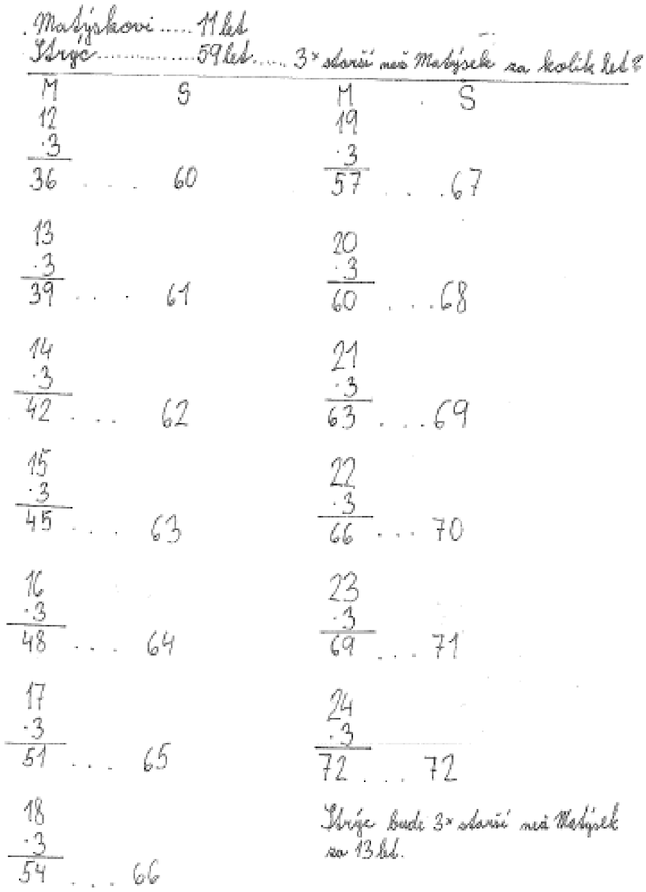
Žák I



Také v tomto řešení žák využívá dělitelnosti. Objevuje se zde i výpočet vedoucí k závěrečnému vyřešení úlohy. Je zajímavé, že žák nespoléhá na jeden výpočet, ale zapisuje oba možné výpočty. Otázkou je, zda tak činí pro svoji kontrolu nebo pro potřebu dokonalé prezentace svého řešení úlohy.

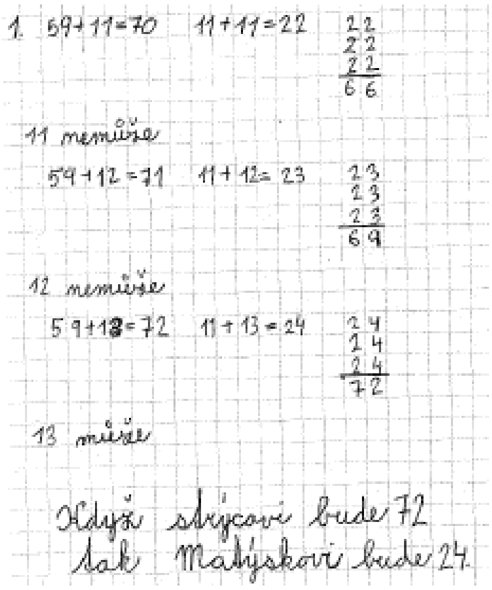
Žák J

Žák trpělivě vypisuje jednotlivé trojnásobky věku Matýska a příslušný věk strýce a každý výsledek vyhodnotí a rozhodne o pokračování systematické práce, pokud výsledek neodpovídá zadání úlohy.



Žák K

Žák převádí násobky na opakované sčítání stejného sčítance. Je také zřejmé, že využívá počáteční odhad, kdy začíná od dolního odhadu a pokračuje následujícími roky.



1. 59+11=70   11+11=22   22 / 22 / 22 / 66

11 nemůže

59+12=71   11+12=23   23 / 23 / 23 / 69

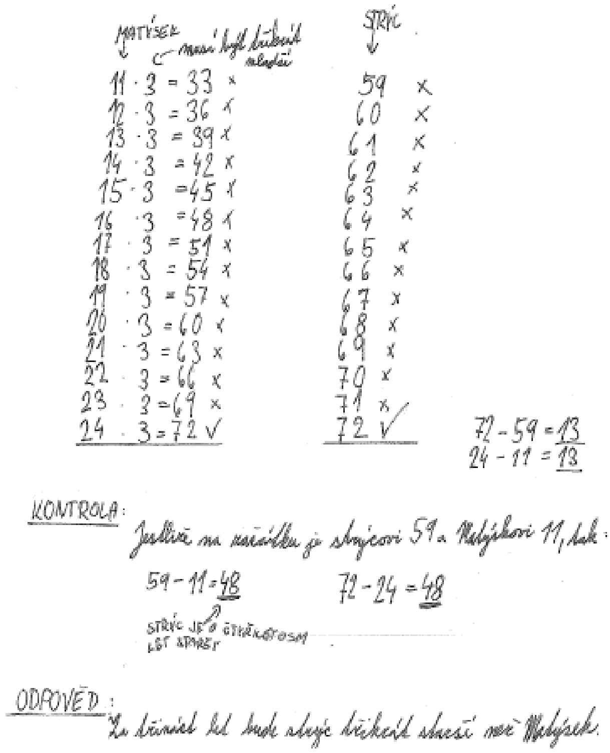
12 nemůže

59+13=72   11+13=24   24 / 24 / 24 / 72

13 může

Když strýcovi bude 72 tak Matýskovi bude 24.

Žák L



MATÝSEK – musí být třikrát mladší   STRÝC

11 · 3 = 33 x   59 x
12 · 3 = 36 x   60 x
13 · 3 = 39 x   61 x
14 · 3 = 42 x   62 x
15 · 3 = 45 x   63 x
16 · 3 = 48 x   64 x
17 · 3 = 51 x   65 x
18 · 3 = 54 x   66 x
19 · 3 = 57 x   67 x
20 · 3 = 60 x   68 x
21 · 3 = 63 x   69 x
22 · 3 = 66 x   70 x
23 · 3 = 69 x   71 x
24 · 3 = 72 ✓   72 ✓

72 − 59 = 13
24 − 11 = 13

KONTROLA: Jestliže na začátku je strýcovi 59 a Matýskovi 11, tak:

59 − 11 = 48   72 − 24 = 48

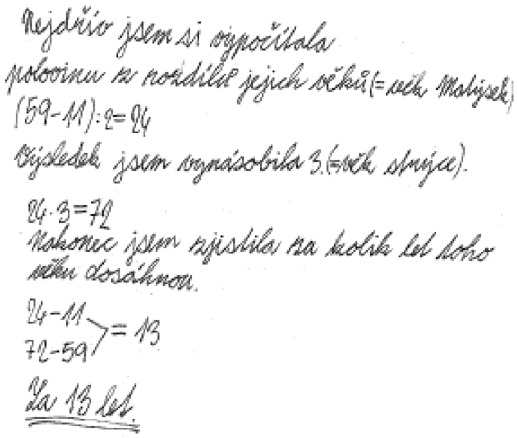
STRÝC JE O ČTYŘICETOSM LET STARŠÍ

ODPOVĚĎ: Za třináct let bude strýc třikrát starší než Matýsek.

Není běžné, že žáci provádějí kontrolu svého řešení, jak to vidíme u žáka L, který své řešení navíc doplňuje dalšími zjištěnými údaji, ač je zadání úlohy nepožaduje (rozdíl věku Matýska a strýce).

2) Další žákovská řešení bez použití rovnic:

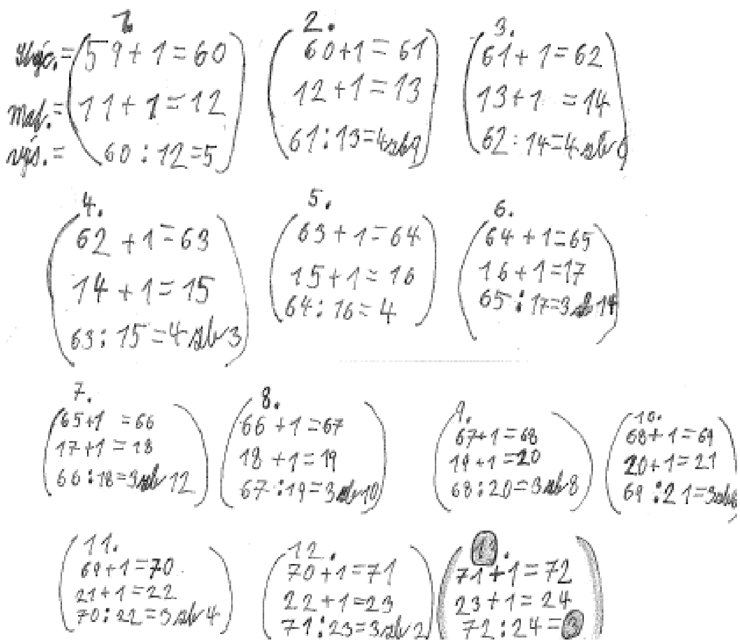
Žák M


Nejdřív jsem si vypočítala
polovinu z rozdílu jejich věků (= věk Malýšek)
(59-11):2=24
Výsledek jsem vynásobila 3 (= věk strejce).
24·3=72
Nakonec jsem zjistila za kolik let toho
věku dosáhnou.
24-11
72-59 = 13
Za 13 let.

Toto řešení je ojedinělé, učitelé na seminářích se shodli na tom, že by je takový způsob řešení nikdy nenapadl.

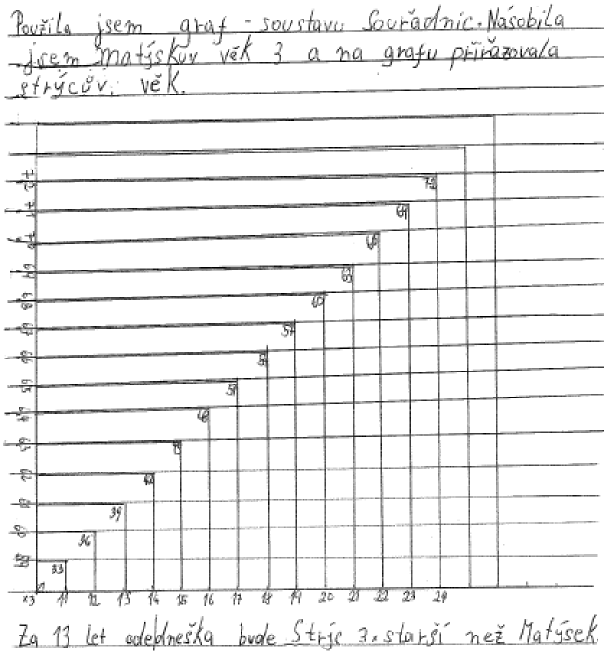
Žák N

Neobvyklý způsob zápisu, kdy pro každý rok žák systematicky vypíše všechny údaje, navíc pracuje se zbytky při dělení. Jedná se o velmi pečlivý způsob řešení a zápisu.


1. 59+1=60, 11+1=12, 60:12=5
2. 60+1=61, 12+1=13, 61:13=4 zb 9
3. 61+1=62, 13+1=14, 62:14=4 zb 6
4. 62+1=63, 14+1=15, 63:15=4 zb 3
5. 63+1=64, 15+1=16, 64:16=4
6. 64+1=65, 16+1=17, 65:17=3 zb 14
7. 65+1=66, 17+1=18, 66:18=3 zb 12
8. 66+1=67, 18+1=19, 67:19=3 zb 10
9. 67+1=68, 19+1=20, 68:20=3 zb 8
10. 68+1=69, 20+1=21, 69:21=3 zb 6
11. 69+1=70, 21+1=22, 70:22=3 zb 4
12. 70+1=71, 22+1=23, 71:23=3 zb 2
13. 71+1=72, 23+1=24, 72:24=3

Žák O

Následující řešení je ojedinělým grafickým řešením, které bylo učiteli na semináři hodnoceno jako velmi vzácné. Fascinoval je způsob využití závislosti, která je u dětí spíše problematickou částí učiva.



3) Žákovská řešení pomocí rovnice:

V sadě žákovských řešení se objevilo i několik případů, kdy řešitel využil rovnice. Předpokládáme, že je zde zřejmý vliv starší osoby (sourozenec, rodič, učitel?). Pokud je žák na dobré řešitelské úrovni z hlediska zobecňování a nepředbíhá se tento vývoj, nemusí docházet k formalismu. Pokud ovšem řešitel není schopen vhledu do obecných zápisů jednotlivých vztahů v úloze, může být formalismus nebezpečný.

Žák P

$S = 59$
$M = 11$
$X = ?$

$S + 1x = 3 \cdot (x + M)$
$59 + 1x = 3 \cdot (x + 11)$
$59 + 1x = 3x + 33$
$59 - 33 = 3x - 1x$
$26 = 2x$

$x = \underline{\underline{13}}$

Strýc bude za 13 let třikrát starší než Matýsek.

Žák Q

strýc 59 let
Matýsek 11 let
Za kolik let = x

$59 + x = 3 \cdot (11 + x)$
$59 + x = 33 + 3x \quad | -x$
$59 = 33 + 2x \quad | -33$
$26 = 2x \quad | :2$
$\underline{\underline{13 = 1x}}$

Strýc bude třikrát starší za 13 let.

Zkouška:
$11 + 13 = 24$
$59 + 13 = 72 \quad 72 : 3 = \underline{\underline{24}}$

Následující úlohy jsou opět převzaty z *Korespondenčního semináře Matýsek*. V roce 2015-2016 byly úlohy inspirovány návštěvou cirkusu DUPLO, který zavítal do Matýskova rodiště.

Korespondenční seminář Matýsek, 2015-2016, série 1., úloha 2.

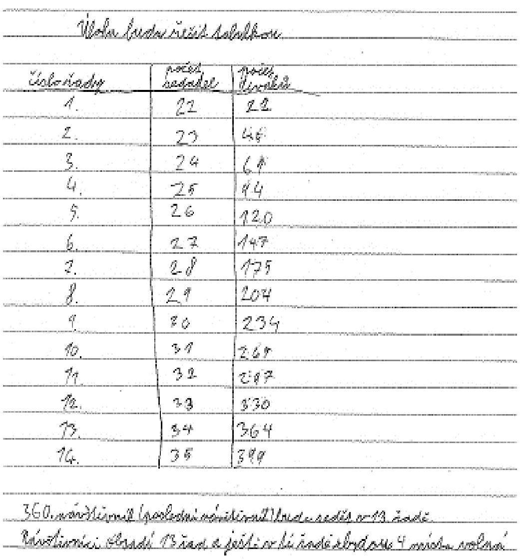
Uvaděčka umisťuje návštěvníky cirkusu tak, aby postupně obsazovali hlediště od první řady a nevynechávali žádné místo.
Kolik řad návštěvníci představení obsadí, pokud nejdelší řada v hledišti cirkusu má 35 míst, každá řada má o 1 místo méně než řada za ní a v nejkratší první řadě je 22 míst?

Autentická žákovská řešení s komentářem

1) Žákovská řešení s využitím systematického zápisu:

V řešeních žáků A a B se setkáváme s přehledným systematickým zápisem. Je zřejmé, že žáci dopočítávají zpaměti bez konkrétního zápisu počet volných míst v poslední obsazované řadě.

Žák A

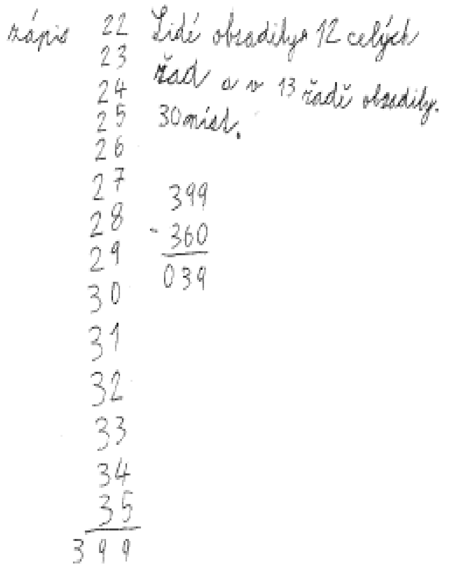


Úlohu budu řešit tabulkou.

Číslo řady	počet sedadel	počet diváků
1.	22	22
2.	23	46
3.	24	69
4.	25	94
5.	26	120
6.	27	147
7.	28	175
8.	29	204
9.	30	234
10.	31	265
11.	32	297
12.	33	330
13.	34	364
14.	35	399

360. návštěvník (poslední návštěvník) bude sedět v 13 řadě.
Návštěvníci obsadí 13 řad a ještě v 14 řadě zbydou 4 místa volná

Žák B



zápis

22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
———
399

Lidé obsadily 12 celých řad a v 13 řadě obsadily 30 míst.

$$\begin{array}{r} 399 \\ -\,360 \\ \hline 039 \end{array}$$

Žák C

V řešení se objevil pouze prostý součet po sobě jdoucích přirozených čísel vyjadřujících počet diváků postupně ve všech řadách až po řadu s nejvyšší kapacitou. Pro úplnost žák zjistil počet volných křesel, závěr učinil zpaměti.

1. ř = 22 } usedadla 45
2. ř = 23 }
3. ř = 24 … 69
4. ř = 25 … 94
5. ř = 26 … 120
6. ř = 27 … 147
7. ř = 28 … 175
8. ř = 29 … 204
9. ř = 30 … 234
10. ř = 31 … 265
11. ř = 32 … 297
12. ř = 33 … 330
13. ř = 34 … 364

Obsadí 12 řad a ve 13 řadě zůstanou 4 místa volná.

V následujících řešeních se žáci rozhodli využít postupné odčítání.

Žák D

PŘIŠLO — ZBÝVÁ OSADIT

1. řada: 360 − 22 = 338

USADILO SE

2. řada: 338 − 23 = 315
3. řada: 315 − 24 = 291
4. řada: 291 − 25 = 266
5. řada: 266 − 26 = 240
6. řada: 240 − 27 = 213
7. řada: 213 − 28 = 185
8. řada: 185 − 29 = 156
9. řada: 156 − 30 = 126
10. řada: 126 − 31 = 95
11. řada: 95 − 32 = 63
12. řada: 63 − 33 = 30
13. řada: 30 lidí

Žák E

360 − 22 = 338 − 23 = 315 − 24 = 291 − 25 = 266 − 26 = 240 − 27 =
= 213 − 28 = 185 − 29 = 156 − 30 = 126 − 31 = 95 − 32 = 63 − 33 =
= 30

Navštěvníci obsadili 13 řad, z toho je 12 plných.

U žáků na prvním stupni ZŠ se někdy objevuje formálně chybný zápis, který často využívají starší žáci, kteří si tak nesprávně zkracují zápis. Bohužel v tomto případě se u žáka D takový formálně chybný zápis objevuje. Přesnou informaci o počtu volných míst žák neuvádí.

Porovnejme s řešením žáka F, kde je výsledek i zápis v pořádku. V žádném případě nebezpečí formálně chybných zápisů při pedagogickém působení nepodceňujme.

Žák F

Návštěvníci obsadí dvanáct celých řad, ve třinácté řadě jich bude třicet.
360 − 22 − 23 − 24 − 25 − 26 − 27 − 28 − 29 − 30 − 31 − 32 − 33 = 30
Od celkového počtu odečítáme počet míst v řadách, musíme začít první řadou.

Žák G

Kolik řad návštěvníci zabrali? (pokud nejdelší řada má 35 míst.
Počet návštěvníků 360.
Každá další řada o 1 méně než
nejkratší řada 22 míst.
Kolik řad návštěvníci zaplní?
zaplní: 22 + 23 = 45 + 24 = 69 + 25 = 94 + 26 = 120 + 27 = 147 + 28 = 175 +
175 + 29 = 204 + 30 = 234 + 31 = 265 + 32 = 297 + 33 = 330 + 34 = 364
Návštěvníci zcela zaplní 11 řad
Ve 13 řadě zůstanou 4 místa volná.

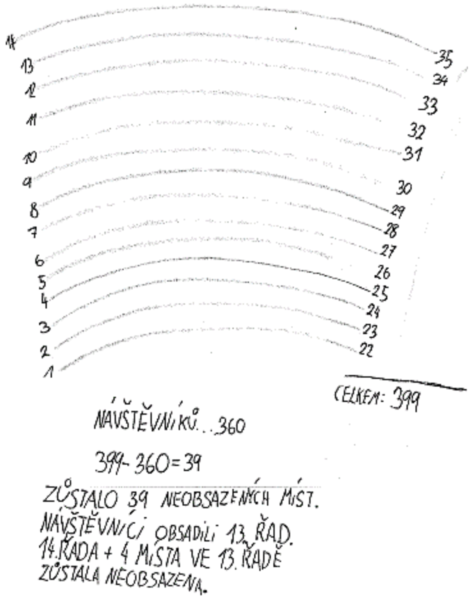
V předchozím řešení se objevují dva formalismy. Jeden spočívá ve formálně chybném zápisu, kdy žák postupně připisuje další operace, přičemž rovnost samozřejmě neplatí, i když je zapsána. Často používaný je další formalismus, kdy šipka označuje vazbu mezi údaji. Mnohdy není žákům jasné, jakou vazbu šipka označuje. Je zde velké nebezpečí zobecnění, kdy má žák zakódováno, že šipka znamená vždy stejný vztah (např. vzroste).

2) Žákovská řešení doprovázená slovním popisem, popř. vizualizací

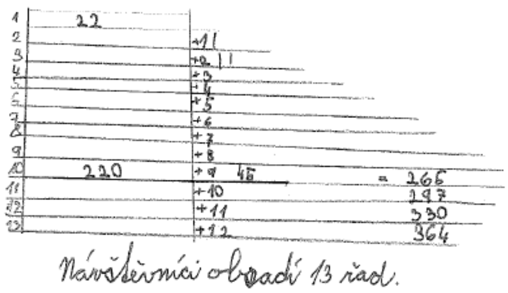
Žák H

KOLIK ŘAD NÁVŠTĚVNÍCI OBSADILY? ŘAD BYLO 14, OBSADILY 12 ŘAD A 30 MÍST ZE 13 ŘADY.
ZJISTILA JSEM TO TAK, ŽE JSEM SI PSALA: 1 ŘADA 22 MÍST, 2 ŘADA 23 MÍST….. AŽ DO 14 ŘADY S KAPACITOU 35 MÍST. POTOM JSEM SEČETLA 22+23+24+25+26+27+28+29+30+31+32+33+34+35=399, ODEČETLA 399-360=39 A ČÍSLO 39 POSTUPNĚ ODEČÍTALA OD ŘADY 14 A 13.

Žák I



Žák J

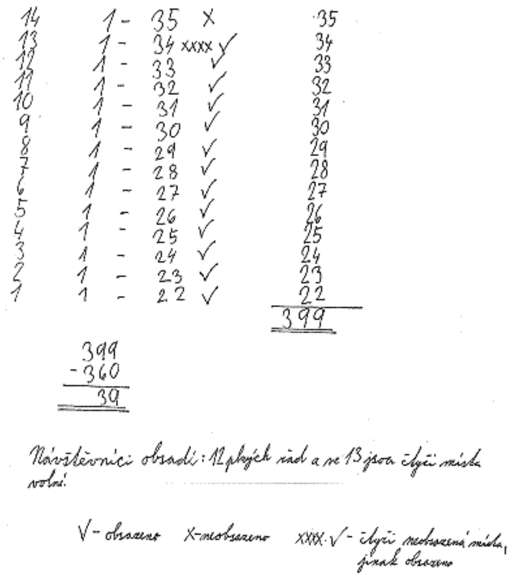


Žák částečně využívá grafického záznamu, zjišťuje a zapisuje součty až od 10. řádku. Lze tedy předpokládat, že při řešení využívá odhad. Žák neřeší, zda je řada plně obsazena.

3) Žákovská řešení s detailním rozborem situace

Žák K

Neobvyklá je legenda k řešení žáka K. Sledujeme, jak žák zavádí symbolické znaky pro „obsazeno“, „neobsazeno“ a zajímá ho detailně, jak vypadá situace v posledních obsazovaných řadách.



Obdobně pečlivě rozepisují žáci L a M obsazenost v posledních řadách v následujícím řešení.

Žák L

$22+23+24+25+26+27+28+29+30+31+32+33+34+35=399$

celkový počet řad – 14   celkový počet míst

předposlední řada celkem 34 míst, z toho 4 volné

$399-35-4=360$

poslední řada – volná

$$\underbrace{22+23+24+25+26+27+28+29+30+31+32+33=330}_{12 \text{ plných řad}}$$

$330+30=360$

předposlední řada – 30 obsazených; 4 volné

Bude 12 plných řad, 30 plných míst v 13. řadě.

14. řada úplně volná; 4 volná místa v 13. řadě.
35 míst

Žák M

Celkem máme 14 řad.
Sečteme počet lidí v řadách

1ř. – 22
2ř. – 23
3ř. – 24
4ř. – 25
5ř. – 26
6ř. – 27
7ř. – 28
8ř. – 29
9ř. – 30
10ř. – 31
11ř. – 32
12ř. – 33
13ř. – 34
14ř. – 35

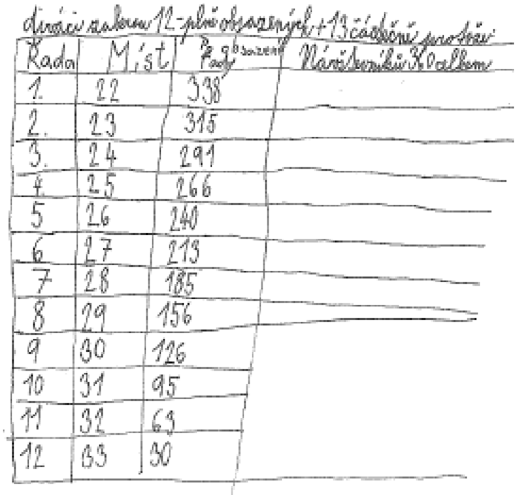
Celkem 399 lidí

Ale prodalo se jen 360 vstupenek
$399-360=39$
39 míst zůstalo neobsazených, což je celá poslední řada a ještě (39−35=4) 4 místa z předposlední řady.

Neobsazená zůstane <u>celá poslední řada (35 míst)</u> a <u>4 místa z předposlední řady.</u>

4) Žákovská řešení s využitím tabulkového zápisu:

Žák N

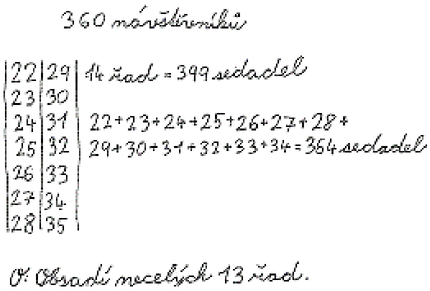


Řada	Míst	Řad obsazení	Návštěvníků celkem
1.	22	338	
2.	23	315	
3.	24	291	
4	25	266	
5	26	240	
6	27	213	
7	28	185	
8	29	156	
9	30	126	
10	31	95	
11	32	63	
12	33	30	

Žák si do tabulky zaznamenal potřebné dílčí výpočty i pořadí řad. Využívá postupné odčítání (obdobně jako žáci D, E). Chybí však závěrečný úsudek a vyhodnocení situace ve 13. řadě.

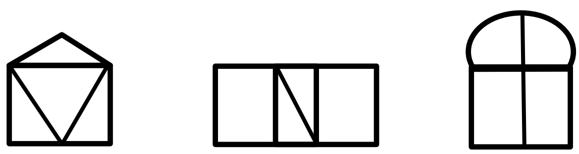
Žák O

Žák sestavil tabulku pouze o dvou sloupcích, do kterých vpisuje postupně počet diváků v jednotlivých řadách. Tabulka v tomto případě nemá žádný vztah k vlastnímu myšlenkovému postupu.



Korespondenční seminář Matýsek, 2015-2016, série 2., úloha 3.

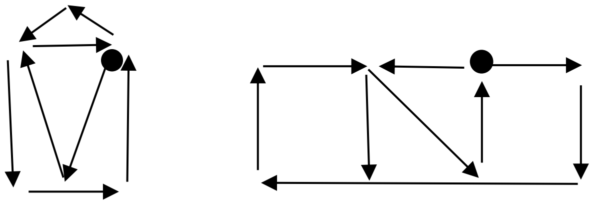
Matýska i strýce v cirkusu fascinovalo vystoupení pudlů, kteří běhali po vyznačených cestičkách. Podmínkou bylo proběhnout každou část cesty pouze jednou (jako když kreslíte obrázek jedním tahem).



Který z uvedených obrázků nelze jedním tahem nakreslit?
Poznáte, proč některý obrázek jedním tahem nakreslit jde a proč jiný nakreslit nejde?

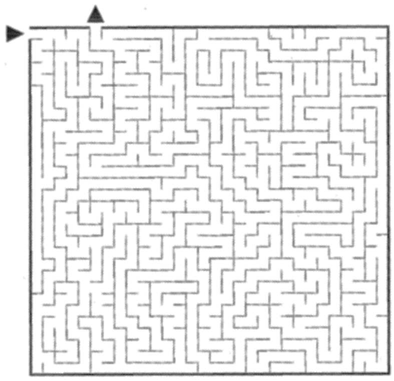
Možné řešení s komentářem

Jedná se o oblíbené jednotažky, které žáci většinou řeší metodou pokus-omyl, přičemž u jednotažek, které nemají řešení, je ověření neřešitelnosti zdlouhavé. Učitel při vytváření a ověřování řešitelnosti může s výhodou využít Eulerovo pravidlo. Starší žáky můžeme toto pravidlo naučit a tak je zasvětit alespoň z části do oblasti topologie.[8]
Někteří žáci v řešení vyznačili šipkou směr tahů (viz obr.), někdy zakreslili pouze spojitou čarou způsob řešení). Třetí obrázek nelze zakreslit jedním tahem (má 4 uzly lichého stupně).



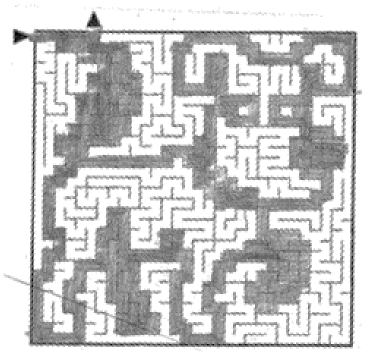
Korespondenční seminář Matýsek, 2015-2016, série 2., úloha 4.

Najděte cestu bludištěm a celou plochu vyznačené cesty vybarvěte. Objeví se obrázek.



Autentické žákovské řešení s komentářem

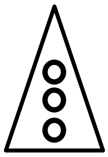
Pokud žáci nevybarvili celou plochu vyznačené cesty, vznikal obrázek deformovaný. Míra deformace závisela na pečlivosti řešitele při vybarvování. V některých případech nebylo ani zřejmé, že se jedná o obrázek psa, při mírné nepřesnosti byly například nedokreslené oči psa. Většina řešení měla dokonalou podobu (viz obr.).



[8] V rámci projektu *Matematika pro všechny* Jednoty českých matematiků a fyziků (JČMF) a Společnosti učitelů matematiky (SUMA) vznikl mimo jiné i materiál pro učitele a pracovní list pro žáky *Jednotažky.* Dostupné na: http://home.pf.jcu.cz/~math4all/aktivity_u_s.php?akt_id=701 [cit. 2016-10-31].

Korespondenční seminář Matýsek, 2015-2016, série 3., úloha 1.

V cirkusu vystoupila i skupina šašků. Všichni šašci měli stejné čepice, které se lišily jen barevným rozlišením trojice bambulí. Bambule na čepicích měly pouze zelenou, modrou nebo červenou barvu. Na některých čepicích byly bambule všech tří barev, na některých jen dvou barev, vyskytovaly se i čepice s bambulemi jedné barvy.



Kolik šašků bylo ve skupině, když si Matýsek všiml, že všechny čepice byly navzájem různé a žádné barevné uspořádání bambulí nechybělo?

Možné řešení s komentářem

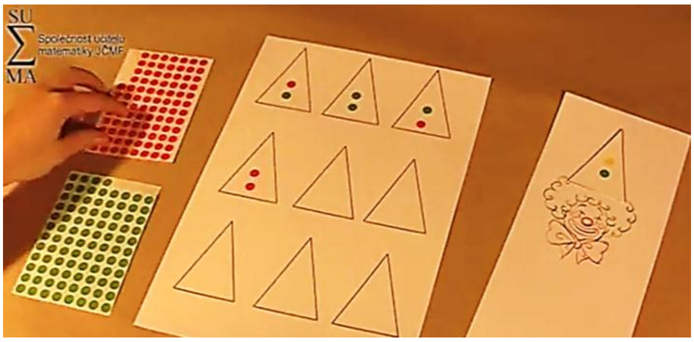
V úloze o čepicích měli žáci příležitost řešit úlohu systematicky. Zjistili, že se to opravdu vyplácí, ve skupině totiž bylo 27 šašků.

3 červené bambule	3 zelené bambule	3 modré bambule	3 možnosti
Č, Č, Č	Z, Z, Z	M, M, M	
2 červené bambule	**2 zelené bambule**	**2 modré bambule**	18 možností
Č, Č, Z	Z, Z, M	M, M, Č	
Č, Č, M	Z, Z, Č	M, M, Z	
M, Č, Č	M, Z, Z	M, Č, M	
Z, Č, Č	Z, M, Z	M, Z, M	
Č, M, Č	Č, Z, Z	Č, M, M	
Č, Z, Č	Z, Č, Z	Z, M, M	
3 různé bambule (červená, zelená, modrá)			6 možností
Č, M, Z	M, Č, Z		
Č, Z, M	Z, M, Č		
M, Z, Č	Z, Č, M		

Obdobnou aktivitu lze najít v metodickém materiálu *Manipulativní činnosti rozvíjející matematickou gramotnost* (Fuchs, Lišková, Zelendová, 2013) na s. 33 – aktivita *Šašci a bambule* v části *Rytmus a kombinatorika* a na odpovídajícím videu.[9]

[9] V letech 2013 a 2014 řešila JČMF projekty *Manipulativní činnosti rozvíjející matematickou gramotnost I. a II.* Projekty byly zaměřeny na rozvoj operačního myšlení dětí předškolního věku a žáků základních škol pomocí odkrývání vztahů mezi objekty na základě manipulace. Série videonahrávek, které nabízejí náměty na rozvíjení představ žáků v oblastech kvantita (množství, jeho odhady a porovnávání, význam čísel, různé reprezentace čísel, operace s čísly, představa velikosti čísel, práce s číselnou osou), množinové představy (třídění, uspořádání, kombinatorické činnosti) a prostor a tvar (orientace v prostoru a čase, rovinné a prostorové útvary, jejich metrické a polohové vlastnosti) jsou dostupné na http://www.vospspgs.cz/manipulativni-cinnosti-rozvijejici-matematickou-gramotnost a http://www.vospspgs.cz/manipulativni-cinnosti-a-modelovani-rozvijejici-matematickou-gramotnost [cit. 2016-10-31].

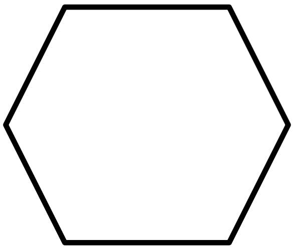
Žáci zde manipulují se sadami nalepovacích koleček ve třech barvách. Odpadne tedy „nuda“ při zápisu a úloha se stává atraktivnější.



Korespondenční seminář Matýsek, 2015-2016, série 3., úloha 2.

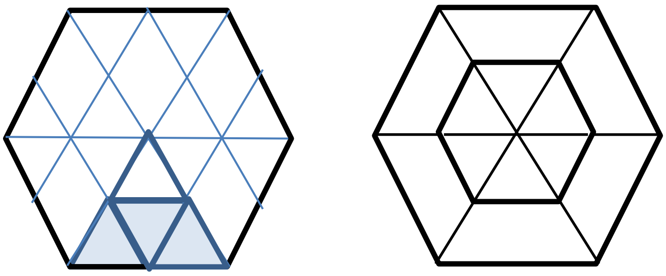
Matýsek si všiml, že barevné logo cirkusu DUPLO má šestiúhelníkový tvar, který je rozdělen na osm shodných částí. Každá část loga má jinou barvu.

Rozdělte šestiúhelník na obrázku na osm shodných částí a jednotlivé části vybarvěte různými barvami.



Možné řešení s komentářem

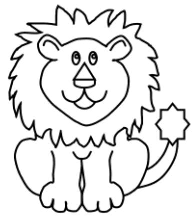
Šestiúhelník lze snadno rozdělit na 6 shodných trojúhelníků, logo má být rozděleno na 8 shodných částí. Číslo 6 a 8 „obsahuje“ číslo 24. Logo musíme rozdělit na 24 stejných dílů – malých trojúhelníků.



Musíme seskupit vždy 3 trojúhelníky, abychom dostali 8 shodných částí původního šestiúhelníku.

Správně vyřešit tuto úlohu vyžadovalo dobrou prostorovou představivost a nápad. Někteří žáci nedokázali rozlišit, zda jsou dílky shodné, či nikoliv. V mnoha případech se nechali „svést“ řešením, které se nabízí (rozdělit útvar na 6 dílů) a nerespektovali v zadání počet dílů nebo shodnost a vytvářeli neshodné části. Úloha je vhodná pro řízenou práci, kdy se odladí nesprávná interpretace zadání a žáci tak mohou být lépe „naladěni“ k badatelskému procesu a hledání správného řešení.

Korespondenční seminář Matýsek, 2015-2016, série 3., úloha 3.



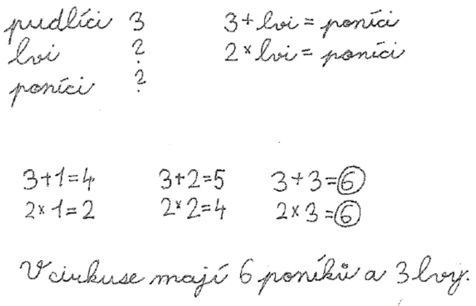
Cirkus DUPLO provozoval také drezúru pudlů, poníků a lvů. Víme, že v manéži při drezúře byli tři pudlové.
Kolik bylo v manéži poníků a kolik lvů, když pudlů a lvů bylo dohromady stejně jako poníků a poníků bylo dvakrát tolik co lvů?

Autentická žákovská řešení s komentářem

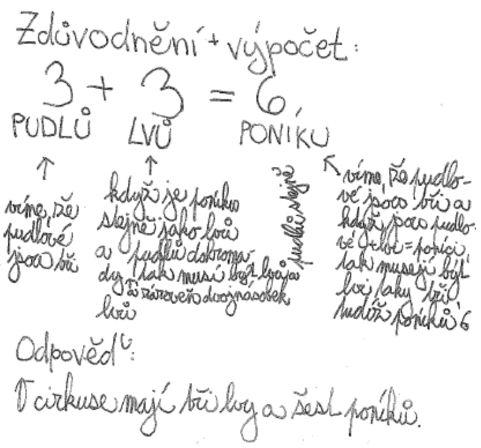
1) Žákovská řešení bez formálních zápisů:

Žák A

Přehledné a systematické řešení, ve kterém žák nezavádí zkrácený zápis pro neznámé údaje, vystačí si s psaným textem.



Žák B



Slovní komentář k výpočtu a výsledku je zajímavým způsobem vysvětlení postupu řešení. Je zřejmé, že si v tomto případě žák uvědomuje, že přičíst stejný počet je významově totéž jako vytvořit dvojnásobek počtu. Tento správný úsudek vede k správnému řešení úlohy.

Žák C

Zápis řešení u tohoto žáka je nutno „správně číst“ a respektovat to, že zápis 3P znamená 3 poníci, nikoli 3krát počet poníků. V tomto případě nejde tedy o řešení pomocí rovnic, ale o autentický záznam logické úvahy.

P = pudlové   L = lvi   K = poníci

$3P + ?L = ?K$

$K = 2 \cdot L$

$3P + 3L = 6K$

$6K = 2 \cdot 3L$

V cirkuse mají 6 poníků a 3 lvy.

Žák D

Žákův zápis řešení bez využití formálního jazyka je přesto přesný a umožňuje správnou úvahu, úsudek i závěr.

Pudl=3

Pudl+Lev=Poník

2×Lev=Poník

Lev+Lev=Pudl+Lev

Lev=Pudl   3=3

Lev +Pudl =Poník   3+3=6

Žák E

Pudlů + Lvů = Poníků

‖   ‖   ‖

Lvů + Lvů = Poníků

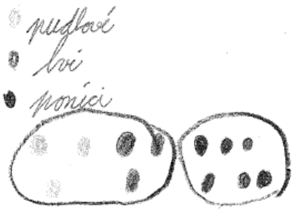
↓   ↓

Lvi = 3   Poníků 6

Velmi jednoduchý je zápis, který je stručný a správný i bez zavedení formálního jazyka. Sledujeme zde přehledný záznam logické úvahy: pudlů musí být stejně jako lvů.

Žák F

Podívejte se kolik je lvů a poníků.



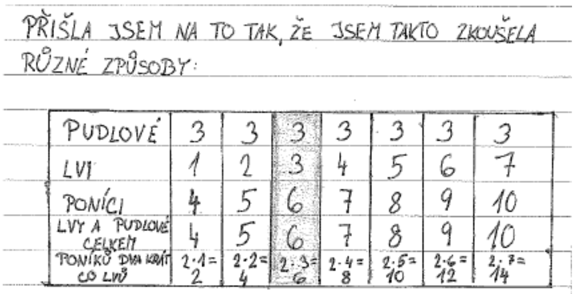
$3 \cdot 2 = 6$

V tomto případě žák volí grafickou formu, kdy pro stejný počet objektů volí záznam dvou množin o stejné mohutnosti. Pomáhá si tak vizualizací, i když je také možné, že vizualizaci používá pouze jako dorozumívací jazyk pro hodnotitele soutěže. Poukazuje na to úvodní oslovení „Podívejte se …“.

Žák G

Někteří žáci jsou textem úlohy inspirováni k výtvarnému ztvárnění situace, viz následující řešení. Toto řešení je správné, je ale chybně naformulováno vysvětlení (poníků je dvakrát více než lvů a pudlů dohromady). Bylo by zajímavé a užitečné tento formulační nedostatek poopravit následným komentářem řešitele. Ostatní žáci by tak měli možnost hlouběji analyzovat text, což je žádoucí pro nácvik přesného slovního vyjádření.

Žák H



PŘIŠLA JSEM NA TO TAK, ŽE JSEM TAKTO ZKOUŠELA RŮZNÉ ZPŮSOBY:

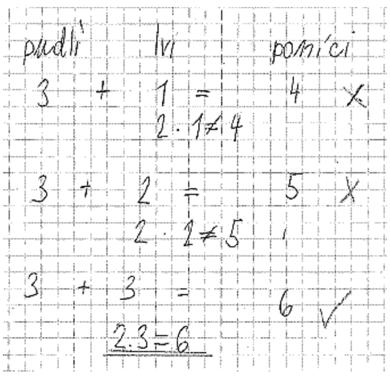
PUDLOVÉ	3	3	3	3	3	3	3
LVI	1	2	3	4	5	6	7
PONÍCI	4	5	6	7	8	9	10
LVY A PUDLOVÉ CELKEM	4	5	6	7	8	9	10
PONÍKŮ DVA KRÁT CO LVŮ	2·1= 2	2·2= 4	2·3= 6	2·4= 8	2·5= 10	2·6= 12	2·7= 14

Žákyně využívá přehledný zápis do tabulky, do které si zaznamenává i dílčí výpočty. Pracuje metodou pokus-omyl. Využití tabulkového zápisu u této úlohy bylo ojedinělé.

2) Žákovská řešení s formálními zápisy:

Žák I

Velmi přehledný zápis řešení, žák pracuje systematicky a navíc zapisuje s využitím symbolického jazyka (rovnost neplatí). Vidíme, že není třeba formálně zavádět proměnnou, popř. neznámou předčasně. Žáci na 1. stupni si se zápisem řešení velmi dobře poradí a navíc se nám díky jejich osobitému zápisu podaří vhled do jejich úsudku a způsobu řešení.



Žák J

pudlů 3
lvů x
poníků = ... y

$x : 2 = 3$ $\quad l = 3$ $\quad 3 + 3 = 6$ $\quad 6 : 2 = 3$
$3 + l = p$ $\quad p = y$
$p = p : 2 = l$

Lvi jsou 3 a poníků je 6.

V řešení se objevuje formálně nesprávný zápis *p* = *p* : *2* = *l*, který ovšem neovlivnil správnou odpověď. Je zřejmé, že formální zápisy není třeba uměle zavádět, mohou vnést nepřesnosti do porozumění vztahům, závislostem apod., a působit tak v budoucnu problémy.

3) Žákovská řešení s využitím rovností a rovnic:

Žák K

pudlové 3
poníci ...... p?
lvi .... l?

$3 + l = p$
$p = 2 \cdot l$

1) $l = 1$ $\quad 3 + 1 = p$
$p = 2 \cdot 1$ není správné

2) $l = 2$ $\quad 3 + 2 = p$
$p = 2 \cdot 2$ není správné

3) $\underline{\underline{l = 3}}$ $\quad 3 + 3 = p$
$p = 2 \cdot 3$ je správné
$\underline{\underline{p = 6}}$

V cirkusu je 6 poníků a 3 lvi.

V řešení se objevuje postupné zavádění proměnných. Je zřejmé, že žák pracuje s porozuměním a používá dobře srozumitelný přiměřeně formální zápis.

Žák L

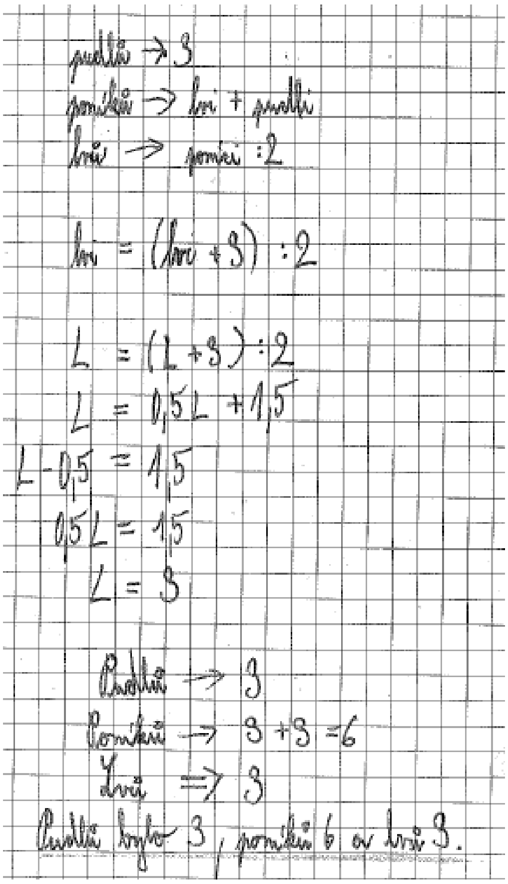
3 pudlové
x lvů
2x poníků (Poníků je 2. tolik co lvů)
pudlu a lvů je dohromady stejně jako poníků

$3 + x = 2x$
$3 = 2x - x$
$3 = x$ → Lvi jsou tři
poníků je 2.3 to je šest

V tomto řešení sice žák využívá rovnice, můžeme však předpokládat spolupráci se starší osobou (sourozenec, rodič, učitel apod.). Tento „zásah“ do řešení nemusí být vždy na závadu, pokud je řešitel schopen vnímat výhodu formálního zápisu a není pro něj tento formální jazyk zátěží.

Žák M

V následujícím řešení se objevuje rovnice s desetinnými čísly, což není pro výpočet v oboru přirozených čísel nutné. Žák použil ojedinělý způsob řešení a je velmi pravděpodobný zásah starší osoby. Tento způsob řešení je zbytečně složitý a není účelný, i když je řešení správné.



Korespondenční seminář Matýsek, 2015-2016, série 3., úloha 4.

a) Kolik minut trvalo závěrečné představení cirkusu, které začalo v 18:16 a skončilo v 19:28?
b) Jak dlouhý byl potlesk, který trval tak dlouho jako osmina celého představení?
c) Má pravdu Matýsek, který tvrdí, že představení i s potleskem trvalo hodinu a půl?

Autentická žákovská řešení s komentářem

1) Žákovská řešení s využitím převodu časových jednotek:

Práce s časovými údaji není jednoduchá vzhledem k používání jiného než desetinného zápisu, kdy převod časových jednotek není stejný jako v desetinném rozvoji. V zadané úloze je při dělení časového úseku vhodný převod hodin na minuty.

Žák A

18.16
19.28 = 1h.12 min. = 72 min

Závěrečné představení trvalo 1h.12min

72:8=9min.

Potlesk trval 9min.

72+9=81min. 81min.=1h. 21min.

Matýsek nemá pravdu. Představení
trvalo 1h.21min.

V žákovském řešení není vyznačena operace, kterou žák v úvodním výpočtu použil. Převod jednotek je využit správně.

Žák B

a) 19:28 − 18:16 = 1:12 = 72 minut
Představení trvalo 1 hodinu 12 minut tedy
72 minut

b)
72m : 8 = 9m
Potlesk trval 9 minut

c)
72+9 = 81m 1:30 = 90m
81 < 90
81m = 1:21m
Matýsek nemá pravdu že představení
trvalo hodinu a půl.

U tohoto řešení je třeba zvážit, zda by zvolený způsob neselhal, kdyby menšitel vyjadřoval více minut než menšenec a musel by se údaj o hodinách převést na minuty. Žák také nesprávně používá zápis pro jednotku minut (m).

Žák C

a) 18:16 a kolik je 19:28 = 1 hod a 12 min => 72 min

Představení trvalo 72 minut

b) 72:8 = 9 min

Potlesk trval 9 minut

c) 72+9 = 81 => 1hod a 21min

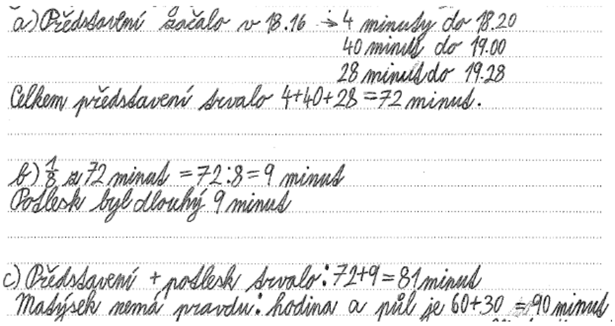
Matýsek nemá pravdu.

Srozumitelný zápis postupu řešení, vždy s jasně formulovaným závěrem.

2) Žákovská řešení s využitím rozfázování postupu řešení:

Žák D

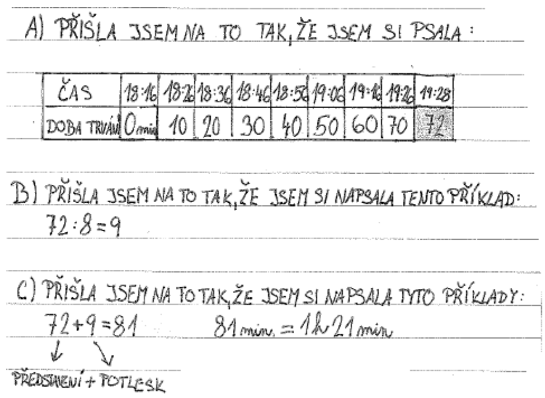
Výpočet délky představení si žák D postupně rozkládá – nejprve doplní do desítek minut, pak do celé hodiny. Je vidět, že si situaci analyzuje a počítá s výhodou.


a) Představení začalo v 18.16 → 4 minuty do 18.20
40 minut do 19.00
28 minut do 19.28
Celkem představení trvalo 4+40+28 = 72 minut.

b) $\frac{1}{8}$ z 72 minut = 72 : 8 = 9 minut
Potlesk byl dlouhý 9 minut

c) Představení + potlesk trvalo: 72+9 = 81 minut
Matýsek nemá pravdu: hodina a půl je 60+30 = 90 minut

Žák E


A) PŘIŠLA JSEM NA TO TAK, ŽE JSEM SI PSALA:

ČAS	18:16	18:26	18:36	18:46	18:56	19:06	19:16	19:26	19:28
DOBA TRVÁNÍ	0 min	10	20	30	40	50	60	70	72

B) PŘIŠLA JSEM NA TO TAK, ŽE JSEM SI NAPSALA TENTO PŘÍKLAD:
72 : 8 = 9

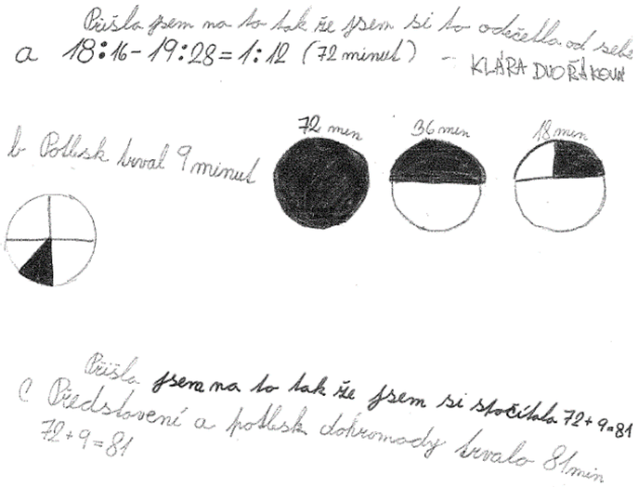
C) PŘIŠLA JSEM NA TO TAK, ŽE JSEM SI NAPSALA TYTO PŘÍKLADY:
72 + 9 = 81   81 min = 1 h 21 min
PŘEDSTAVENÍ + POTLESK

Žákyně si správně uvědomuje převod 1 h = 60 min. Zajímavé je, že postupně počítá po desítkách minut. Nepovažuje bohužel za podstatné zapsat závěr řešení.

3) Žákovská řešení s využitím vizualizace

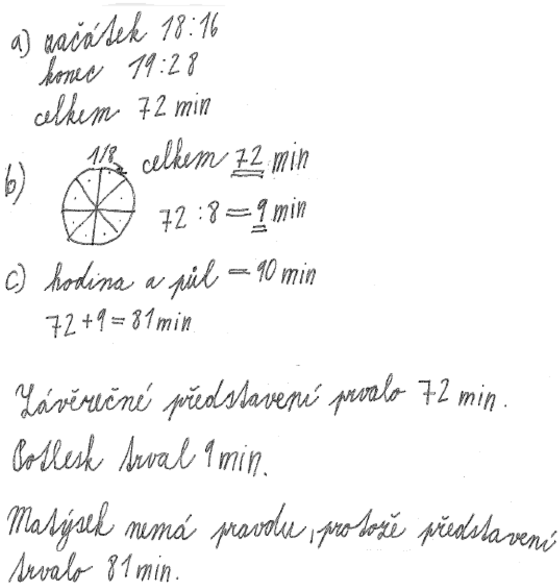
Žák F

V tomto grafickém řešení žák postupně odvozuje zlomky. Je vidět velmi jasné porozumění a vnímání části celku.



Žák G

Při dělení časového údaje využívá žák v následujícím řešení vizualizaci ve formě grafického dělení na osm shodných částí.

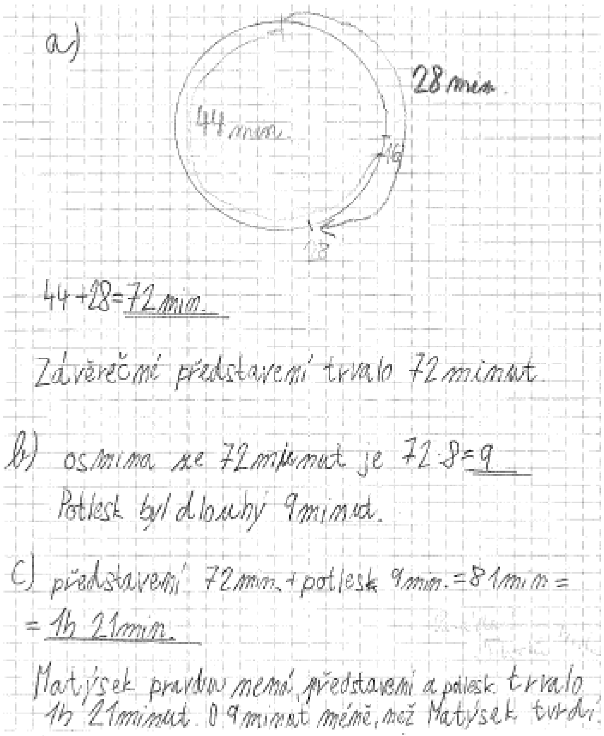

a) začátek 18:16
konec 19:28
celkem 72 min

b) 1/8 celkem 72 min
72 : 8 = 9 min

c) hodina a půl = 90 min
72 + 9 = 81 min

Závěrečné představení trvalo 72 min.
Potlesk trval 9 min.
Matýsek nemá pravdu, protože představení trvalo 81 min.

Žák H



44 + 28 = 72 min.
Závěrečné představení trvalo 72 minut.

b) osmina ze 72 minut je 72 : 8 = 9
Potlesk byl dlouhý 9 minut.

c) představení 72 min + potlesk 9 min = 81 min =
= 1h 21 min.
Matýsek pravdu nemá, představení a potlesk trvalo 1h 21 minut. O 9 minut méně, než Matýsek tvrdí.

V tomto řešení pozorujeme záznam údajů a situace do pomyslného ciferníku s naznačenou orientací hodinové ručičky. Grafický záznam je doplněn přehledným zápisem a závěrem řešení.

Korespondenční semináře velmi často spojují matematické úlohy pomocí jednoduchého (pro žáky 1. stupně např. i pohádkového) příběhu. Učitel může při tvorbě pracovních listů pro nadané žáky tento osvědčený způsob využít a vybrané úlohy spojit do kompaktního celku. Toto spojení si budeme ilustrovat na několika úlohách z publikace *Sedm matematických příběhů pro Aničku, Filipa, Matýska* (Vaňková, Lišková, 2005).

Využití úloh z publikace Sedm matematických příběhů pro Aničku, Filipa, Matýska

<u>Úloha 1:</u> Filipovi začaly prázdniny, proto odjel k babičce na venkov. Má tam čtyři kamarády Andulku, Břeťu, Cilku a Dádu, kteří mají kanárka, papouška, psa a kočku. Každý má jedno zvířátko. Dvě z děvčátek mají ptáčka, Andulka se bojí psů, Cilka je sousedka kamarádky, která chová papouška. Andulčina maminka je zásadně proti chovu ptáků v klecích.
Umíte zjistit, kdo jaké zvířátko doma chová?

<u>Úloha 2:</u> Kamarádi vědí, že Filip rád luští různé záhady. Jednu si pro něj připravili.
„Filipe, víš, že v každém roce (kromě přestupného) je den, který, napíšeme-li jeho datum a vynecháme tečky, současně uvádí, kolikátým je dnem v roce? Dnes je 10. 7., ale 107. den v roce to není.“
Který den v nepřestupném roce má uvedenou vlastnost?

<u>Úloha 3:</u> Filip naštěstí vyřešil záhadu dříve, než odletěl s rodiči k moři. Při čekání na letadlo ho upoutalo číslo letu. Všiml si, že když toto čtyřmístné číslo vynásobí devíti, dostane číslo, které je symetrické (při čtení zepředu i zezadu je stejné).
Víte, jaké bylo číslo letu?

$$\begin{array}{r} \boxed{\ast}\,\boxed{\ast}\;7\;6 \\ \cdot\quad 9 \\ \hline \boxed{\ast}\,\boxed{\ast}\,\boxed{\ast}\,\boxed{\ast}\,\boxed{\ast} \end{array}$$

<u>Úloha 4:</u> Od moře Filip poslal kamarádům pohlednici s tajemným vzkazem. Každé písmeno zastupovalo jednoznačně určitou číslici (0 až 9). Žádné z čísel nezačínalo nulou!
Zjistěte, jaký příklad je pod písmeny ukryt.

$$\begin{array}{r} A\,H\,O\,J \\ H\,O\,J \\ O\,J \\ J \\ \hline 2\,2\,2\,2 \end{array}$$

<u>Úloha 5:</u> Při dovádění ve vlnách si Filip poranil nohu, a tak musel jeden den ležet v posteli. Dlouhou chvíli si krátil skládáním dílků skládačky podle následujícího návodu:

1. Dílky se při pokládání na plánek nesmí překrývat.
2. Každý dílek skládačky musí zakrýt právě jednu hvězdičku na přiloženém plánku.
3. Dílky musí vyplnit celý plánek kromě políčka, které je černě vybarveno.

Jak mohl Filip dílky na plánek poskládat?

Možné řešení s komentářem

<u>Úloha 1.</u>
Cilka má kanárka, Dáda papouška, Andulka kočku a Břéťa psa.

<u>Úloha 2.</u>
Po trpělivém hledání lze zjistit, že 26. 9. je 269. dnem v roce.

<u>Úloha 3.</u>

Klíčem k vyhledání čísla $\boxed{*}\boxed{*}\boxed{7}\boxed{6}$ je symetrické číslo $48\boxed{*}84$.

$48\boxed{*}84 : 9 = 5\,\boxed{}\boxed{}\boxed{}$

$3\boxed{*}$
  68
   54

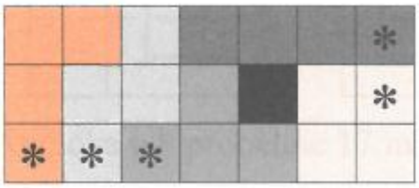
Hledáme tedy dvojciferné číslo $3\boxed{*}$, které dává při dělení 9 zbytek 6, a to je číslo 33.

Pak je 48 384 : 9 = 5 376 a hledané číslo je číslo 5376.
33
68
54
0

<u>Úloha 4.</u>

```
  1 5 7 3
    5 7 3
      7 3
        3
 ________
  2 2 2 2
```

<u>Úloha 5.</u>



Korespondenční semináře mohou být důležitou inspirací pro práci učitele matematiky na 1. stupni ZŠ. Učitelé tak mohou žákům nabídnout vhodné úlohy a problémy, které žáci neřeší jen ve škole, ale ve svém volném čase (prožívání jejich volného času se významně zkvalitní). Podnětné mohou být i následující odkazy: http://www.zshorakhk.cz/matematika/korespondencni-seminar a www.maksik.sk.

Posun může také nastat ve změnách metod práce učitele, kdy dochází postupně k odklonu od formálního způsobu výuky a v hodinách dostává prostor prezentace autentických žákovských řešení. Učitelé, kteří se opírají o podněty z korespondenčního semináře, získávají větší odvahu pracovat s žáky netradičně, využívat badatelské přístupy žáků k řešení a nesnaží se předvádět vzorové postupy řešení, které vlastní invenci žáků potlačují. Žáci si prostřednictvím prezentovaných autentických žákovských řešení rozšíří svůj dosavadní rejstřík různých metod a způsobů řešení i forem záznamů a zápisů řešení.

5. Využití úloh mezinárodní soutěže Matematický klokan

Eva Nováková

Soutěž Matematický klokan je od roku 1997 zařazena mezi soutěže podporované MŠMT ČR[10]. Získala si mezi žáky, učiteli i rodiči žáků značnou popularitu, jak o tom svědčí také počty účastníků. Především na 1. stupni ZŠ, v kategoriích Cvrček (určeno žáky 2. a 3. ročníku) a Klokánek (4. a 5. ročníku) je soutěž všeobecně známá a rozšířená. V roce 2016 se zúčastnilo soutěže v ČR v kategorii Cvrček 109 187 žáků, v kategorii Klokánek 105 668 žáků. Soutěž je koordinovaná asociací *Kangourou sans frontieres* se sídlem v Paříži, v roce 2016 se jí zúčastnilo více než 6 milionů žáků z 58 zemí celého světa.

Žáci řeší v Matematickém klokanovi úlohy, které jsou obvykle označované jako nestandardní. To znamená, že řeší (matematický) problém, hledají a objevují způsob, metodu řešení, protože na řešení úlohy nelze aplikovat rutinní postupy. Řešitel hledá cestu k výsledku originálním způsobem. Řešení nestandardních problémových úloh vyžaduje hluboké soustředění, invenci a čas. Proto jsou tyto úlohy považovány za vhodné pro práci s nadanými, resp. mimořádně nadanými žáky. Rozvíjejí poznání, metakognici a motivaci.

Smyslem soutěže je ovšem získávat pro matematiku také žáky s průměrnými výukovými výsledky. Takovým žákům může účast v soutěži pomoci zvýšit sebevědomí, přesvědčit je o jejich dosud nenaplněných možnostech a také jim dokázat prostřednictvím úspěšného řešení soutěžních úloh, že matematika nemusí být vždy nudný, nezáživný a obávaný školní předmět.

Úlohy ze soutěže Matematický klokan jsou poněkud jiné, než úlohy, se kterými se žáci v učebnicích obvykle setkávají. Nejde jen o to, že mají charakter uzavřených úloh, testových položek s výběrem odpovědi z 5 nabídnutých možností (což do určité míry umožňuje správná řešení pouze „tipovat“). Typický je také způsob zadání, podpora textu ilustrací, schématem nebo jiným způsobem grafické reprezentace.

Soutěžní úlohy umožňují využití i přímo ve výuce. Na webové stránce soutěže www.matematickyklokan.net nalezneme sborníky z jednotlivých ročníků, které obsahují všechny úlohy zadané ve všech kategoriích se správnými výsledky. Učitel má tak k dispozici několik set soutěžních úloh, se kterými může dlouhodobě systematicky pracovat. Většinu z těchto úloh může učitel snadno převést na úlohy otevřené a pomocí nich sledovat a následně analyzovat řešitelské postupy žáků a jejich písemné či obrazové záznamy.

Výsledky žáků v soutěži se mohou v některých případech lišit od představ učitele o matematických schopnostech a znalostech žáků, které se promítají do hodnocení a klasifikace. Nejjednodušší a také nejběžnější způsob interpretace uvedené skutečnosti spočívá v podezření

[10] Podrobnosti o české verzi soutěže, aktuální data i historie minulých ročníků v ČR jsou na webové stránce www.matematickyklokan.net.

typu: „asi to opsal, uhodl výsledek, to je náhoda apod.“. Učitel může však uvažovat i jinak a pokusit se využít nejen průběhu a výsledků jednorázové soutěže, ale i dlouhodobější systematické práce se soutěžními úlohami k reflexi své pedagogické činnosti. Detailnější analýza žákovských řešení může pomoci učiteli diagnostikovat dosud neodhalený potenciál žáků a stát se jedním z nástrojů identifikace nadání žáka pro matematiku.

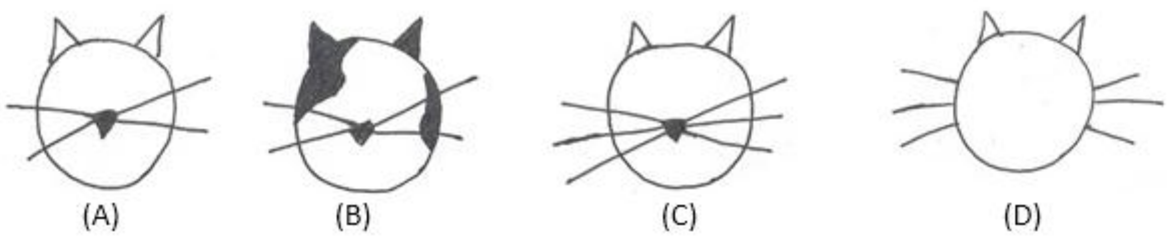
Uvedený způsob práce s úlohami matematické soutěže Klokan je ilustrován v následující části této kapitoly.

Ukázky úloh kategorie Cvrček

Rozdíl v úspěšnosti řešení v kategorii Cvrček mezi žáky druhého a třetího ročníku je značně ovlivněn kvalitou čtení. Lze říct, že čtení s porozuměním, resp. kritické čtení, má významný podíl na úspěšnosti řešení ve všech soutěžních kategoriích. Žáci 2. třídy se zaměřují především na formu, a proto je pro mnohé těžké soustředit se současně na obsah, zvláště ve složitějších formulacích zadání slovních úloh.

Cvrček 2005, úloha 5, 3 body

Verča, Honzík, Kuba a Zuzka mají čtyři různé kočky. Verča má strakatou kočku. Zuzčina kočka je k nám otočena zády. Honzíkova je bílá a má jen čtyři fousky. Poznáš, která kočka patří Kubovi?



Možné řešení s komentářem

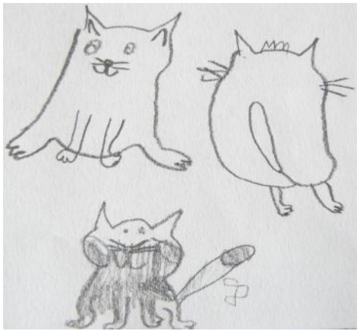
Jednoduchá logická úloha typu zebra. Řešení vyžaduje pozorné čtení zadání a porozumění charakteristickým znakům jednotlivých koček na obrázcích: strakatá kočka je Verči, otočená zády je Zuzky, bílá se 4 vousky je Honzíkova. Vyloučením A, B a D zbývá kočka C, která patří Kubovi.

Autentická žákovská řešení

Při zadání s nabídkou odpovědí řeší žáci úlohu výše popsaným způsobem. Toto řešení je jednoznačné, protože je žákům známo, že v nabídce odpovědí je vždy právě jedna odpověď správná. Situace se změní, pokud přeformulujeme úlohu jako otevřenou. V našem případě stačí pouze změnit poslední větu (např. Nakresli, jak vypadá Kubova kočka.) a odstranit obrázek. Při tomto zadání žák musí odpověď aktivně vytvořit (nakreslit) a k tomu potřebuje mít představu, jak by Kubova kočka mohla vypadat.

Radka

V řešení „překreslila" zadání úlohy, tj. informaci o podobě Verčiny, Zuzčiny a Honzíkovy kočky.



Ema

Z obrázku vidíme, že Ema nakreslila bílou kočku se čtyřmi fousky, což odpovídá popisu Honzíkovy kočky.

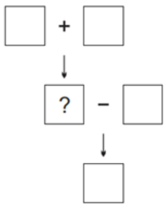
Daniela

Obrázek této kočky se v ničem neshoduje s informacemi o kočkách obsažených v zadání.

Důležitá je interpretace spojení „různé kočky“. Např. i když řekneme o dvou kočkách, že jsou strakaté, tak mohou být „různě“ strakaté. I přesto, že některá z uvedených řešení v sobě nesou znaky koček Verči, Honzíka a Zuzky, nemůžeme prohlásit, že se nejedná o Kubovu kočku. Úloha poskytuje velký prostor pro diskusi.

Cvrček 2005, úloha 12, 4 body

Napiš čísla 1, 2, 3, 4, 5 do čtverců tak,
aby byly výpočty správné.
Které číslo napíšeš místo otazníku?



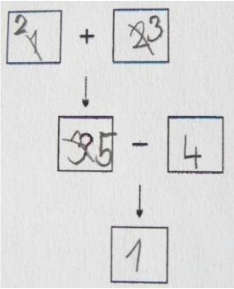
Možné řešení s komentářem

Řešení divergentní úlohy vyžaduje experiment. Místo otazníku patří číslo 5. Pak mohou být jednotlivé výpočty dvojí: buď 2 + 3 = 5 a 5 - 4 = 1, nebo 1 + 4 = 5, 5 - 3 = 2. Je samozřejmě možné zaměnit čísla u prvního součtu (3 + 2) nebo (4 + 1).
Lze diskutovat také případ, kdy místo otazníku zapíšeme číslo 4. Pokud můžeme použít každé z čísel v zadání právě jednou, musíme tuto možnost vyloučit, protože např. 3 + 1 = 4, 4 - 2 = 2, ale číslo 2 je ve dvou čtvercích.

Úlohu můžeme doplnit otázkou: „Můžeme zvolit číslo na místo otazníku, aniž bychom sčítali či odčítali konkrétní čísla?“ Tato otázka vede k následující úvaze. Hledané číslo je v pozici součtu (jako výsledku sčítání) a menšence (čísla, od kterého je odčítáno). U sčítání i odčítání musí jít o největší číslo. Proto se v našem případě jedná o číslo 5.

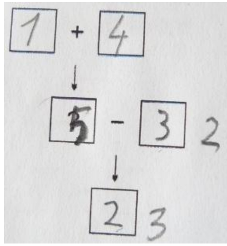
Tuto otázku můžeme položit též až po vyplnění jiných skupin čísel do stejného systému rámečků, nebo po vlastním výběru čísel, kdy má žák již dostatečné množství jednotlivých modelů pro určení vlastností hledaného čísla.

Autentická žákovská řešení



Iva

Z obrázku je zřejmý experimentální způsob řešení.
Prvním krokem bylo dosazení dvou čísel (sčítanci) z nabídky. Po obdržení součtu 3 si žákyně uvědomila, že může dosadit pouze čísla 4 a 5, což by však nevedlo ke správnému řešení. Druhý pokus vedl ke správnému řešení.

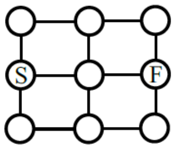


Matěj

Zvolil jiné sčítance, dospěl ke správnému řešení (i k další možnosti zápisu čísel). Při společné kontrole můžeme sledovat, zda žáci vnímají jako jiné řešení, pokud zaměníme sčítance či menšitele a rozdíl.

Cvrček 20015, úloha 15, 5 bodů

Klokan Jirka umí skákat vždy jen na sousední políčko a nesmí se vracet. Kolika různými cestami se mohl dostat čtyřmi skoky ze S do F?



Možné řešení s komentářem

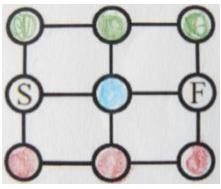
Úloha je známá v literatuře jako *cesty ve čtvercové síti*. Objektem zkoumání je určení počtu cest, kterými lze ve čtvercové síti „projít z místa A do místa B“.
Určení počtu cest nevyžaduje a nepředpokládá žádné speciální matematické znalosti žáka, pouze pečlivé čtení zadání (čtyřmi skoky), dovednost zakreslit skoky do obrázku, vhodně je odlišit (nejlépe barevně vyznačit úsečky) a evidovat jednotlivé případy. Různých cest je 6. Diskutovat lze o podmínce „různými cestami“ – rozumí se například při barevném vyznačení situace, kdy není různými barvami vyznačena *celá cesta* ze S do F, ale pouze jeden její úsek.

Pokud zaznamenáváme všechny cesty do jednoho obrázku, je řešení málo přehledné. Jestliže cesty kreslíme zvlášť, stává se úloha přehlednější, uchopitelnější. Můžeme proto po žácích požadovat, aby zaznamenali každou cestu do vlastního samostatného obrázku. Vhodnou variantou je i nakopírování více kopií (aniž bychom tím ovšem naznačili počet řešení) a vyznačování každé cesty do samostatného obrázku.

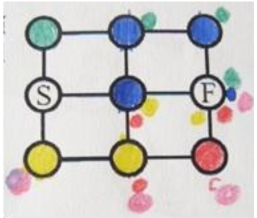
Autentická žákovská řešení

Vidíme různorodou škálu způsobů záznamu řešení. Ukázky jsme rozdělili podle toho, zda řešitelé využívali pastelky či fixy různých barev nebo si vystačili s jednobarevnou tužkou nebo perem.

Klárka

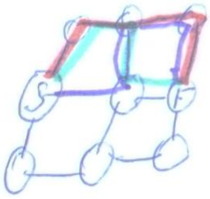


Jedná se o chybné řešení, které plyne z nepřesné interpretace informací obsažených v textu zadání. Mylně proto kromě výchozího a cílového bodu prochází každým uzlem právě jednou. U modré cesty nedodržuje počet skoků. V obrázku jsou barevně odlišeny tři cesty (červená, zelená, modrá).



Simona

Jestliže cesta prochází daným uzlem, vyznačuje ji barevnou tečkou. Výjimkou je první uzel bez barevného označení. V obrázku je zaznamenáno pět cest.

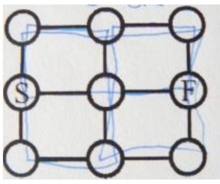


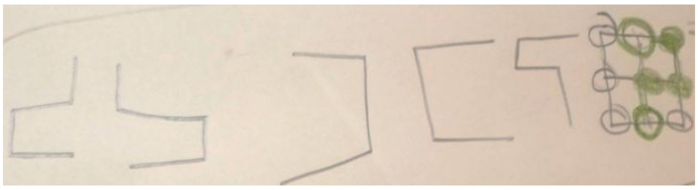
Jan

Jednotlivé cesty vyznačil čarami různých barev (fialová a dva odstíny modré) a využil skutečnosti, že systém cest je souměrný podle osy SF, a proto vyznačil pouze tři cesty.

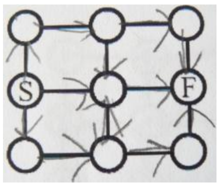
Daniel

Při volbě tohoto způsobu grafického záznamu je obtížné sledovat jednotlivé vyznačené cesty. Daniel proto následně zvolil ještě jiný způsob záznamu, tj. překreslení každé z cest do jiného obrázku, kde vyznačil všechna možná řešení.





Ondra



I když je zde systém šipek jednoznačný, je málo přehledný. Mezi prostředním uzlem a uzlem nad ním chybí oboustranná šipka, a proto Ondra ve své odpovědi uvedl odpověď 5.

Cvrček 2014, úloha 12, 4 body

Kolik žabek tito tři pelikáni dohromady chytili?

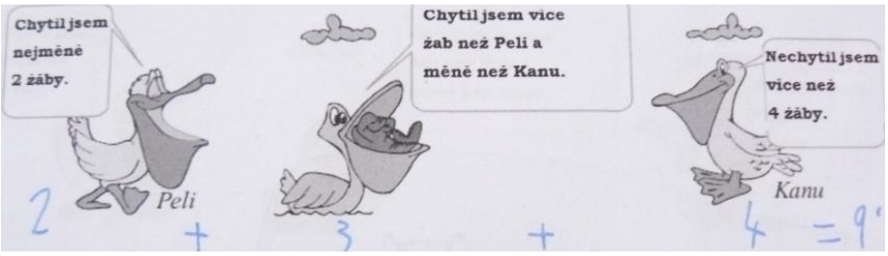
Možné řešení s komentářem

Zadání úlohy využívá podoby jednoduchého kresleného obrázku, znázorňující „bublinový“ rozhovor obvykle několika osob/dětí (v naší úloze ovšem pelikánů), označovaný jako „Concept Cartoon“. Texty v bublinách jsou stručné a používají jednoduchý jazyk.

Řešení úlohy předpokládá pozorné čtení podmínek, vyjádřených na obrázku (nejméně, méně než, více než) a logický úsudek. Pelikán Peli mohl chytit 2, 3 a více žab, pelikán Kanu 1, 2, 3 nebo 4 žáby. Prostřední pelikán musel tedy chytit 3 žáby – to je více než Peli, který chytil 2 žáby, méně než Kanu, který chytil 4 žáby. Součet všech tří úlovků je 2 + 3 + 4 = 9. Úloha má jediné řešení.

Autentická žákovská řešení

Zdeněk



Ukázalo se, že výrazy *nejméně*, *více než*, *méně než* nemají pro žáky rozhodující význam k určení správného řešení. Uvažujeme: Peli chytil 2 žáby, Kamu 4 žáby a prostřední pelikán chytil více žab než Peli a méně než Kamu, musel tedy chytit 3 žáby (2 + 4 + 3 = 9).

Úloha poskytuje prostor pro následnou diskusi. Můžeme navázat na uvedené žákovské řešení otázkou: „Mohl chytit Peli a Kanu jiný počet žab?“ „Co znamená *nejméně*, *více než*?“ Tím se žáci vrací k výchozí situaci (určení počtu žab chycených Peli a Kanu) a následnému vyhodnocení různých možností.

Zajímavé je sledovat diskusi žáků nad skutečností, kdy i bez respektování podmínek *nejméně*, *více než*, *méně než* vyřeší úlohu správně. Někteří považují správnou interpretaci za významnou a jedinou možnou, jiní se spokojí s dosažením správného řešení.
„Chytil jsem nejméně 2 žáby“: Někteří žáci pracují pouze s číslem 2, jiní uvažují o možnostech 2, 3, 4, atd. Horní omezení počtu žab je pro žáky dáno vlastním posouzením reálnosti situace.

Cvrček 2008, úloha 12, 5 bodů

Bedřich má tolik bratrů jako sester. Jeho sestra Zuzka má dvakrát více bratrů než sester. Kolik dětí je v této rodině?

Možné řešení s komentářem

Z první podmínky vyplývá, že v rodině je o jednoho chlapce více než děvčat. Z druhé podmínky lze určit pro počet chlapců a děvčat následující možnosti:
$b = 2$, $s = 1$, pak $ch = 2$, $d = 2$ (není splněna 1. podmínka),
$b = 4$, $s = 2$, pak $ch = 4$, $d = 3$ (obě podmínky jsou splněny),
$b = 6$, $s = 3$, pak $ch = 6$, $d = 4$ (není splněna 1. podmínka).
V rodině je tedy 7 dětí, 4 chlapci a 3 děvčata.

Autentická žákovská řešení

Pro žáky je úloha obtížná. Žáci někdy považují úlohu za neřešitelnou, protože v zadání nenacházejí konkrétní jedno číslo udávající počet chlapců či dívek v rodině nebo alespoň počet sester či bratrů. O to obtížnější je proto záznam řešení.

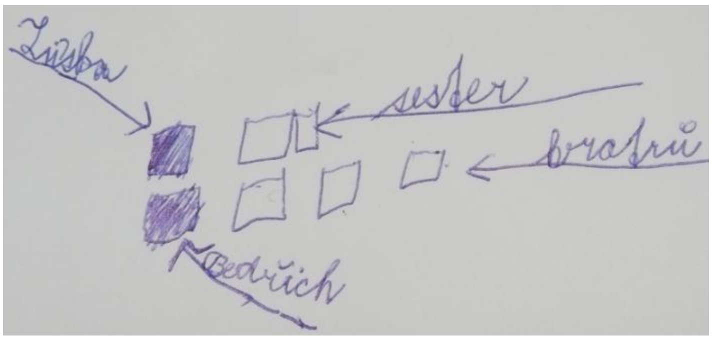
Žáci, kteří svoje řešení nějak zaznamenávali, využívali symbolických reprezentací pro dětské členy rodiny.

Hanka

První kroužek označuje Bedřicha, třetí trojúhelník Zuzku. Další symboly pak zastupují jejich sourozence, kdy je dodržena symbolika mužského (kroužek) a ženského (trojúhelník) pohlaví. Vychází tedy ze situace, kdy v rodině žije Bedřich a jeho sestra Zuzka a dále dokresluje členy rodiny tak, aby byly dodrženy podmínky úlohy.

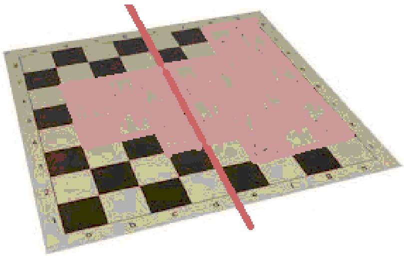
Břéťa

Obrázek je více srozumitelný díky názorným popiskům.



Cvrček 2014, úloha 13, 5 bodů

Šachovnice je poškozená. Kolik černých čtverců chybí na pravé polovině šachovnice?



Možné řešení s komentářem

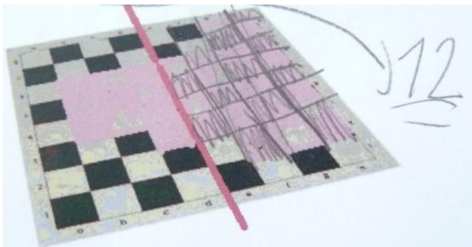
Nedílnou součástí zadání úlohy je obrázek. Předpokládá se uplatnění poznatku, že šachovnice obsahuje 8 × 8 = 64 polí (32 černých a 32 bílých), na každé polovině šachovnice je 16 černých a 16 bílých polí. Protože na „pravé polovině“ jsou na obrázku pouze 4 černé čtverce, chybí jich 12.

Vzhledem ke grafické podobě zadání úlohy žáci často řeší úlohy dokreslováním šachovnice. Pro takové řešení je velmi důležitá přesnost kresby.

Autentická žákovská řešení

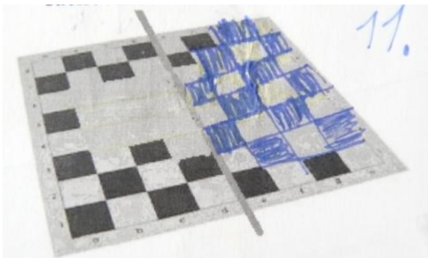
František

Ukázka správného řešení.

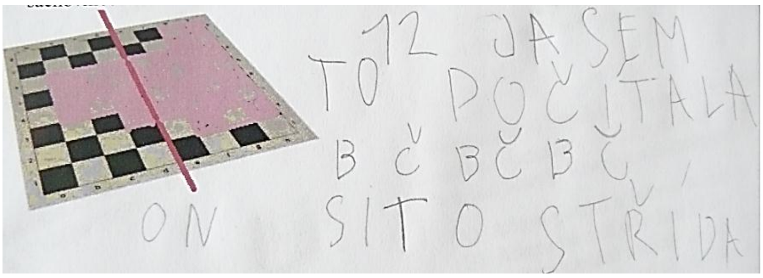


Zbyšek

Ukázka chybného řešení. Kromě přesného kreslení je zároveň důležitá kontrola. Vhodné by bylo kresbu zkontrolovat "od konce".



Veronika



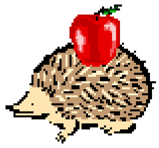
Komentář vyplývající z následného rozhovoru:
Rytmické střídání bílých a černých polí vedlo k poznatku, že na polovině šachovnice jsou v každém řádku dvě černá pole. Takových řádků je na šachovnici 8. Na pravé polovině má být 16 černých polí. Čtyři pole jsou ponechána, proto jich chybí 12.

Ukázky úloh kategorie Klokánek

Opět zdůrazněme, že jedním z charakteristických znaků soutěže je zadání úloh s nabídkou odpovědí. Pro žáky slouží jako užitečná korekce jejich možného řešení úlohy (pokud vlastní řešení nenajdou v nabídce odpovědí, hledají v něm chybu). Většinou však pracují s nabídkou řešení kombinací vylučovacího řešení, dosazovací metody i vlastního řešení úlohy. Zvlášť pro nadané žáky je vhodné přeformulovat původní znění do podoby otevřených úloh.

Klokánek 2003, úloha 6, 3 body

Ježek Marek si stěžoval svým kamarádům: „Kdybych sesbíral dvakrát více jablek, než jsem opravdu sesbíral, měl bych nyní o 24 jablek více.“ Kolik jablek Marek sesbíral?



Možné řešení s komentářem

Ježek sesbíral 24 jablek.

Řešení slovní úlohy je založeno na porozumění vztahům *n-krát více* (násobení, dělení) a *o n více* (sčítání, odčítání). Ze zadání je zřejmé, že číslo 24 vyjadřuje počet skutečně nasbíraných jablek (o 24 více v našem případě vyjadřuje totéž, co dvakrát více).
Úloha je propedeutikou algebry, tj. situace vyjádřená rovnicí $2x = x + 24$.

Autentická žákovská řešení

Pro žáky je obtížné zaznamenat svůj postup řešení a to i pro žáky, kteří úlohu vyřešili správně. Pokud ale rozumí řešení, otvírá se prostor jak pro slovní, tak pro symbolické vyjádření.

Řešení pomocí symbolického zápisu:

Tobiáš

$24 \cdot 2 - 24 = 24$

Marek

$\underline{x \cdot 2 \text{ o } 24 \text{ více}} = 24 \cdot 2 = 48$

Všimněme si ještě jedné typické situace. I přesto, že žák nepoužil formálně správný zápis zadání, vyřešil úlohu správně. Při následné diskusi však bylo zřejmé, že úloze rozumí.

Řešení popsané slovy:

Soňa

Kdyby sesbíral 2x více jablek, měl by o 24 jablek více. Musel mít 24 jablek, aby kdyby nasbíral 2x více měl by jich 48. 48 − 24 = 24.

Michal

Marek sesbíral 24 jablek, protože
2.24 je 48 a polovina je 24.

Klokánek 2003, úloha 23, 5 bodů

Jestliže si v hračkářství koupíš psa a tři medvědy, zaplatíš stejně jako za čtyři klokany. Tři psi spolu se dvěma medvědy stojí také stejně jako čtyři klokani. Je dražší pes nebo medvěd?

Možné řešení s komentářem

Úloha je algebraickou propedeutikou.
Z podmínek platí: $p + 3m = 4k$, $3p + 2m = 4k$. Proto $p + 3m = 3p + 2m$, odtud $m = 2p$.
Medvěd je dvakrát dražší než pes.

Autentická žákovská řešení

Pro tuto úlohu žáci volí zápis velmi zřídka, často nevyužívají žádné písemné záznamy. Pokud žáci mají zkušenost s tímto druhem zápisu, volí algebraický zápis podmínek zadání, kde jednotlivá zvířata zastupuje jejich počáteční písmeno nebo jiný zástupný symbol:

Řešení, která obsahovala záznam s využitím počátečních písmen:

Tomáš

pes = P medvěd = M klokan – K

$P + 3 \cdot M = 4 \cdot K$

$3 \cdot P + 2 \cdot M = 4 \cdot K$

M je dražší.

Tomáš využil ke správnému řešení vyjádření podmínek symbolickým zápisem. Písemný záznam postupu řešení dále neobsahuje ekvivalentní úpravy rovnic. Tomáš se zaměřil na levé strany rovnic, které si musejí být rovny, protože i pravé se rovnají. Uvažoval: "Když přidám dva psy a uberu jednoho medvěda, tak to znamená, že medvěd stojí stejně jako dva psi. Medvěd je proto dražší."

Jitka

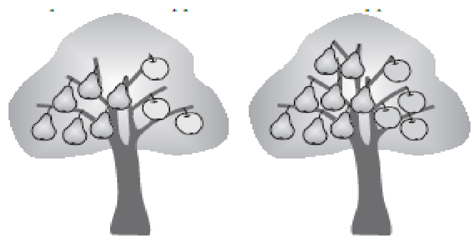
Ve třetím řádku zápisu vyjádřila i vztah mezi cenou medvěda a psa.

$P + 3M = 4K$

$3P + 2M = 4K$

$2P = 1M$

Klokánek 2016, úloha 20, 5 bodů



V kouzelné zahradě rostou kouzelné stromy. Na každém stromě je buď 6 hrušek a 3 jablka nebo 8 hrušek a 4 jablka. Na stromech v zahradě je celkem 25 jablek. Kolik je na stromech hrušek?

Možné řešení s komentářem

Řešení vychází z intuitivního porozumění vztahu přímé úměrnosti. Na každém kouzelném stromě je vždy dvakrát více hrušek než jablek, musí být tedy dvakrát více hrušek na všech stromech v celé zahradě, tj. 50.

Úlohu je možné řešit i hledáním počtu každého z typů stromů. Uvažujeme následovně. Při volbě 1 stromu druhého typu máme 4 jablka. K celku 25 jablek tedy potřebujeme dodat 21 jablek. Tento počet můžeme najít na 7 stromech prvního typu.

Obdobnou úvahu provedeme s 2, 3,... stromy druhého typu, ke kterým hledáme vhodný počet stromů prvního typu, aby jejich součet byl 25. Druhým takovým řešením jsou 4 stromy druhého typu (16 jablek) a 3 stromy prvního typu.

K řešení můžeme též využít diofantovskou rovnici vyjádřenou tvarem $3x + 4y = 25$.

Úlohu lze vhodně doplnit otázkou „Kolik je v zahradě stromů?“

Autentická žákovská řešení

Jana

Pokud sledujeme poměr počtu hrušek a jablek na jednotlivých stromech, vidíme, že vždy platí, že hrušek se urodí dvakrát více než jablek. Z tohoto vztahu plyne závěr, že při celkovém požadovaném počtu 25 jablek bude na stromech 50 hrušek (25 · 2 = 50).

Jana vyšla z poměru počtu hrušek a jablek na jednotlivých stromech – jablek je dvakrát méně. Při celkovém požadovaném počtu 25 jablek bude na stromech 50 hrušek (25 · 2 = 50).

protože – je jich tam 50 hrušek
jablek je 2x méně

Jirka

Vztah mezi počtem hrušek a jablek na jednotlivých stromech nezohlednil, řeší úlohu pomocí zjišťování počtu stromů v zahradě.

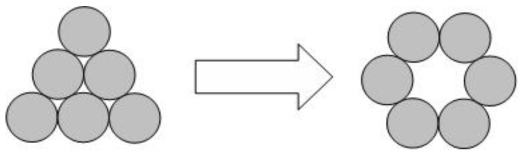
$3 \cdot 7 = 21$ $\quad 4^{8} \cdot 1 + 3 \cdot 7^{42} = 25$

Je tam 50 hrušek

Při volbě 7 stromů, na kterých roste po třech jablkách, vyrostlo 21 jablek (tj. 42 hrušek). Doplníme 1 strom se čtyřmi jablky (tj. 8 hrušek) a dopočítáme celkový počet, 50 hrušek.

Klokánek 2010, úloha 6, 3 body

Karel položil 6 stejných mincí do tvaru trojúhelníku (jako na obrázku vlevo). Jaký nejmenší počet mincí musíš přemístit, aby mince tvořily kruh jako na druhém obrázku?



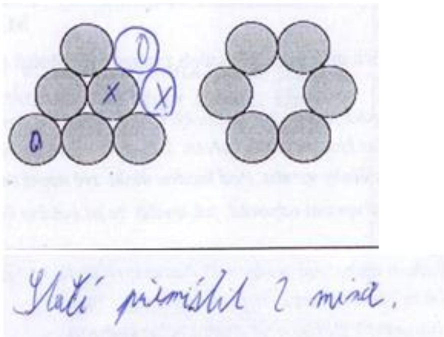
Možné řešení s komentářem

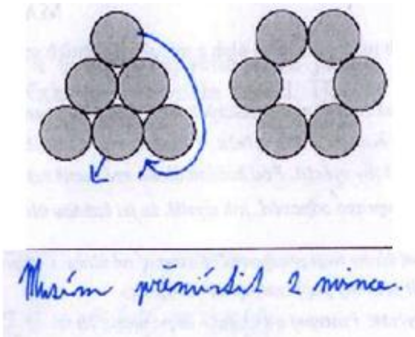
Řešení je založeno na mentální manipulaci. Stačí přemístit 2 mince: například levou dolní minci doprava nahoru, pravou prostřední minci posunout více doprava.

Autentická žákovská řešení

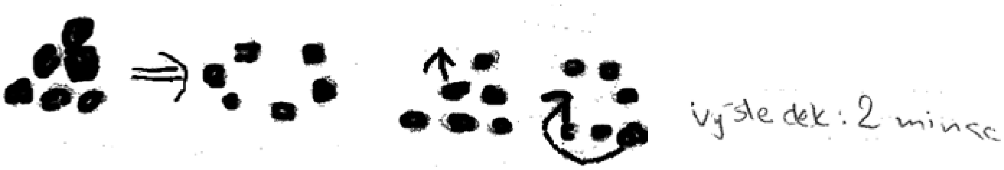
Nejobvyklejším způsobem řešení je využití manipulace s předměty (mince, kruhy,...). Při tomto typu řešení ale někteří žáci přemístí všechny mince. Zapomenou-li na podmínku hledání nejmenšího počtu přesunutých mincí, řeší úlohu chybně.

Jirka a Jana



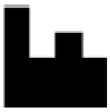


Julie

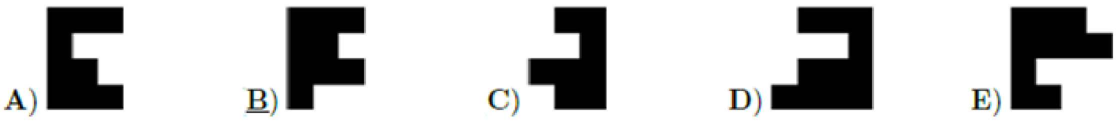


Jedná se o procesuální záznam řešení, který je typický pro zpracování na tabuli, kde žáci snadno přemístěné "mince" umazávají.

Klokánek 2013, úloha 15, 4 body



K tomuto dílku skládačky najdi takový druhý dílek, aby jejich složením vznikl černý obdélník.



Možné řešení s komentářem

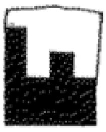
Úloha má jediné řešení, které je vyznačeno na obrázku B. Řešení vyžaduje geometrickou představivost, využívá různé míry abstrakce: opírá se o mentální manipulaci (složení dvou dílů do tvaru obdélníku provádí řešitel pouze v myšlenkách) nebo pokusů o dokreslení dílů

do tvaru obdélníku. Dokreslovat samozřejmě mohou i tak, že vybraný díl rozdělí na části, aby si lépe vytvořili představu, jak spolu se zadaným dílem obdélník vytvořit. Pro ověření správnosti (nebo řešení založeném na fyzické manipulaci) lze jednotlivé dílky vystřihnout a vhodně k sobě přiložit.

Autentická žákovská řešení

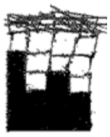
Jarmila

Žákyně využila k řešení pouze dokreslení obrysu druhého dílku do obdélníku.

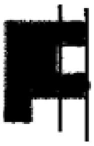


Vojta

Druhý díl je též možné řešit s oporou ve čtvercové síti. Vojta uvažoval i o velikosti obdélníku. Původní načrtnutá velikost byla 4 × 6 čtverečků. Vzhledem k nabídce řešení ale byla velikost upravena (na obrázku je škrtnutý řádek o čtyřech čtvercích) na 5 × 6 čtverečků.



Anežka

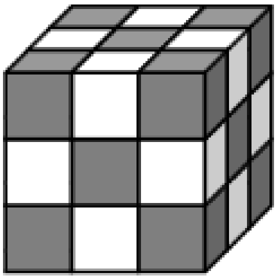


Dokreslovat samozřejmě mohou i vybraný díl, rozdělit ho na části tak, aby si lépe vytvořili představu, jak spolu s nabízeným dílem vytvoří obdélník. Dokreslená část však musí tvořit takový díl, který je v nabídce odpovědí.

Klokánek 2015, úloha 11, 4 body

Jarda slepil z bílých a šedých krychliček plnou krychli (podívej se na obrázek). Nikdy k sobě nepřilepil dvě krychličky stejné barvy. Kolik je v krychli bílých krychliček?

(A) 10 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15



Možné řešení s komentářem

Jedním z rozhodujících faktorů pro úspěšné řešení této úlohy je zkušenost žáka se stavbami z krychlí, se SOMA-kostkou (pro naši situaci nejlépe ve dvojbarevném vyhotovení) či se stavěním z kostek v nejširším slova smyslu.

Úloha je zadaná jako uzavřená, s výběrem z 5 nabídnutých odpovědí. Pokud však žáci nechtějí pouze „tipovat“ správnou odpověď, musejí vyjít z obrázku a krychli si představit vytvořenou ze „tří řad, vrstev“: v dolní vrstvě je 5 šedých a 4 bílé, v prostřední 4 šedé a 5 bílých a v horní vrstvě opět 5 šedých a 4 bílé. Adam použil 14 šedých a 13 bílých krychliček, tj. o jednu šedou více (správné řešení je C). Úlohu lze řešit "pouze" v představě, s oporou o obrázek v zadání úlohy, kreslením náčrtku či manipulací s krychlemi.

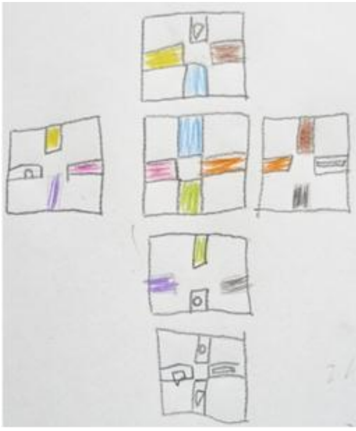
Autentická žákovská řešení

Žáci si stavbu představí po vrstvách a v nich počítají bílé krychličky. Na obrázku je vymodelováno řešení pomocí souboru barevných krychlí, které měli žáci k dispozici.

1. patro	2. patro	3. patro
		

Početní vyjádření: 4+5+4=13

Petra



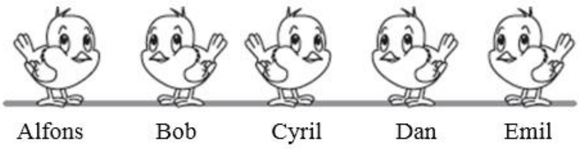
Ve svém řešení žákyně zakreslila pohled na všech šest stěn krychle. Jednotlivé krychle odlišila barevně či symbolem.

I když je řešení zpracováno přehledně, je chybné. Ukázka demonstruje jedno z častých chybných řešení. Číslo 12 udává počet bílých krychliček, jejichž alespoň jedna stěna je částí stěny velké krychle. Někteří žáci neberou v úvahu existenci prostřední krychle, jiní zvažují tento problém již při řešení úlohy. Tedy zda se bude stále jednat o krychli, pokud by vyjmuli prostřední krychličku.

Při písemném řešení se nemusí projevit chyby, do nichž se promítá nesprávná terminologie (stěna krychle je žáky nesprávně nazývána stranou).

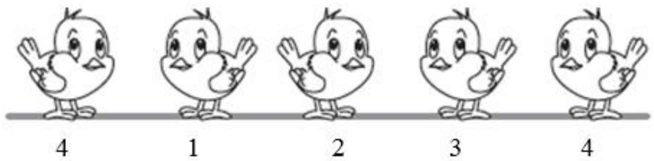
Klokánek 2016, úloha 24, 5 bodů

Na větvi sedělo pět vrabců (podívej se na obrázek). Každý zacvrlikal tolikrát, kolik stojí vrabců na té straně, na kterou je natočený. Například vrabec Alfons zacvrlikal čtyřikrát. Jeden z vrabců se otočil na opačnou stranu. Opět každý vrabec zacvrlikal tolikrát, kolik stojí vrabců na straně, na kterou je natočený. Tentokrát vrabci zacvrlikali víckrát než napoprvé. Který z vrabců se natočil na druhou stranu?



Možné řešení s komentářem

Zadání úlohy je náročné na porozumění textu, obtížnost zvyšuje také skutečnost, že v soutěžním testu byla úloha zařazena jako závěrečná – značný počet žáků k řešení posledních úloh vzhledem k vymezenému času a únavě ani nedospěje. Obtížnost úlohy je ovšem pouze zdánlivá. Označme jednotlivé vrabce číslem, vyjadřujícím počet zacvrlikání:

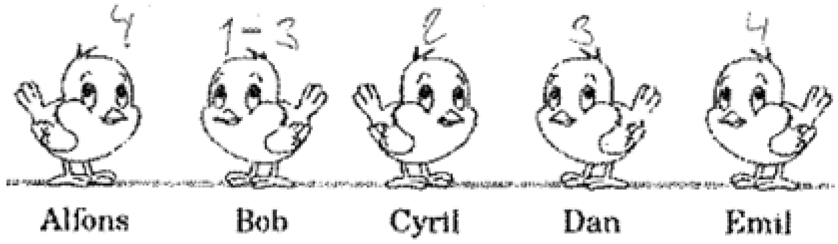


Protože počet zacvrlikání má být po otočení jednoho z vrabců větší než původně, je zřejmé, že se musel otočit vrabec Bob. Původně zacvrlikal pouze jednou, po natočení třikrát. Původně se ozvalo 14, po otočení Boba celkem 16 zacvrlikání.

Autentická žákovská řešení

Při pozorném čtení a vhledu do úlohy žáci posuzují změnu v počtu zacvrlikání u jednotlivých vrabců, který zapisují do obrázku zadání úlohy:

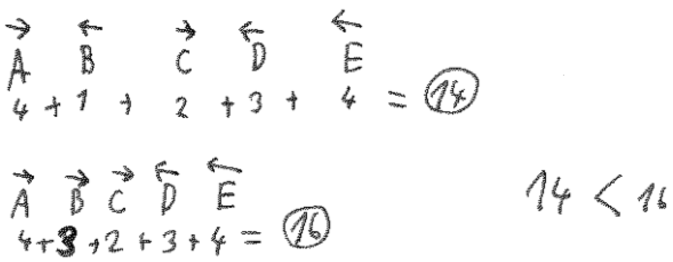
Soňa



Číslo nad každým z vrabců vyjadřuje počet jeho zacvrlikání při stávající poloze. Poté Soňa posuzovala změny polohy vrabců a jejich vliv na počet zacvrlikání. Ke zvýšení počtu zacvrlikání po otočení dojde pouze u druhého vrabce a to z jednoho zacvrlikání na tři (1-3).

Olga

Žákyně ve svém písemném záznamu zohlednila nejen změnu v počtu zacvrlikání Boba, ale také změnu jeho natočení na celkový součet:



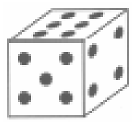
6. Ukázky z publikací zaměřených na rozvoj matematického nadání, didaktické hry

Eva Zelendová

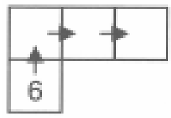
Matematika pro bystré a nadané žáky (Blažková, Budínová, Durnová, Vaňurová, 2016)

Schémata pro odvalování kostky, 4.2

Kostku postavíme do základní polohy (na dolní stěně je 1, na horní 6, na pravé straně je 4, na levé 3, na přední 5 a na zadní 2).

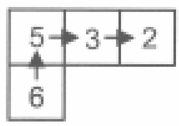


V mysli „převracej“ hrací kostku ze základní polohy přes její hranu podle daného plánku a sleduj stěnu, která je právě horní. Jaké číslo je na horní stěně kostky v posledním poli?

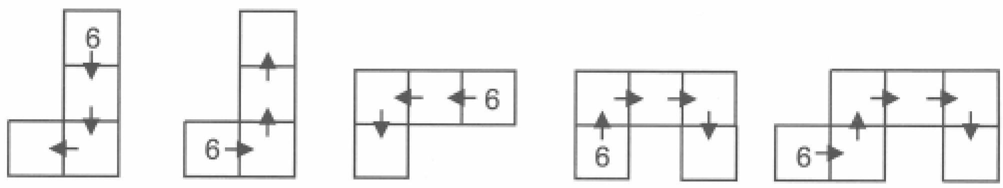


Možné řešení s komentářem

Na horní stěně krychle v posledním políčku plánku bude 2:

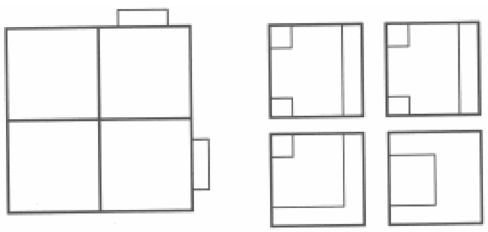


Další možné plánky pro odvalování kostky:



Potrubí, 4.3

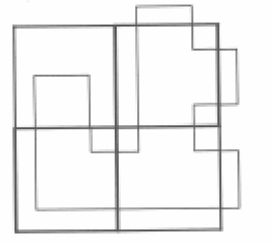
Dané schéma vyplň daným počtem kousků tak, aby vzniklo funkční potrubí.



Možné řešení s komentářem

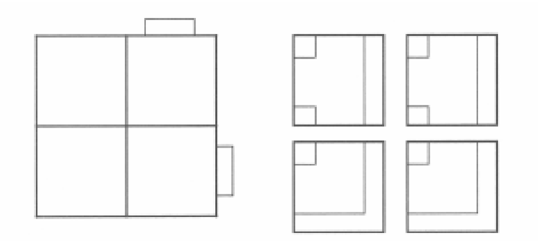
Žák má k dispozici schéma a čtyři kousky, kterými má schéma vyplnit. Kousky může otáčet. Musí zvažovat všechny možnosti, kdy potrubí buď pokračuje do sousedního dílku, nebo pokračuje ven, nebo je slepé.

V daném případě existuje jediné správné řešení, v jiných případech může mít úloha i více řešení.

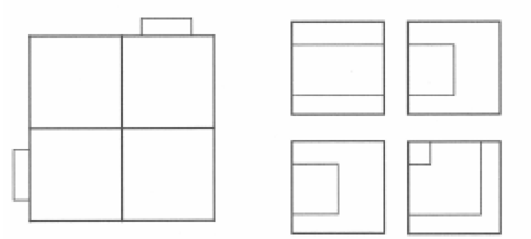


Další možná zadání:

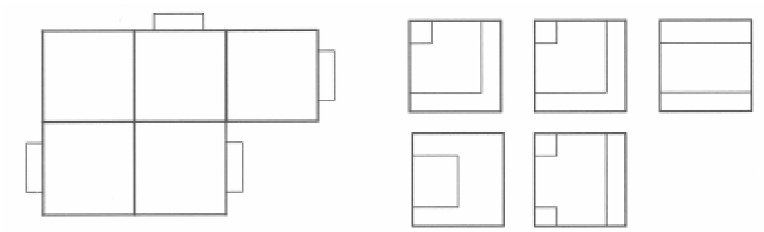
A)



B)



C)



Logické úlohy, 4.6.1

Sedm děvčat stálo v řadě. Hana stála vedle Alžběty. Nejbližší sousedky Soni byly Hana a Petra. Dana stála nejdále od Petry. Sousedky Jany byly Dana a Alžběta. Bára stála nejvíce vpravo. Zapište, jak stála děvčata vedle sebe.

Možné řešení s komentářem

Ze zadání lze určit několik dílčích faktů:

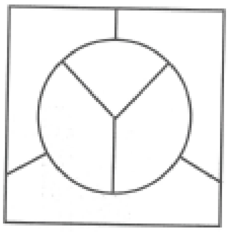
1. __ __ __ __ __ __ B
2. H S P nebo P S H
3. D J A nebo A J D

Pokud Hana stála vedle Alžběty, je dvojí možné pořadí děvčat:
Dana, Jana, Alžběta, Hana, Soňa, Petra, Bára nebo Petra, Soňa, Hana, Alžběta, Jana, Dana, Bára.

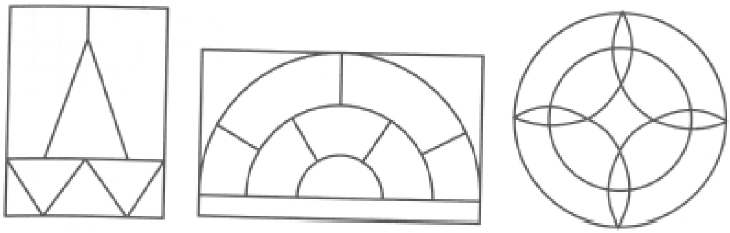
Hry a matematika na 1. stupni ZŠ (Krejčová, 2009)

Pouze čtyři barvy, 4.13

Vybarvi obrázek s použitím tří barev tak, aby se nikde nedotýkaly stejné barvy:



Vybarvi obrázky s použitím čtyř barev tak, aby se nikde nedotýkaly stejné barvy:



Možné řešení s komentářem

Námět aktivity staví na tom, že děti rády vybarvují. Přitom nejde o samoúčelnou činnost, ale o řešení problémové úlohy, která rozvíjí představivost, kombinatorické schopnosti a přispívá ke koncentraci pozornosti.

Matematický vetřelec, 3.8

Najdi mezi čísly v tabulce to, které tam z nějakého důvodu nepatří. Tuto skutečnost zdůvodni.

a)

14	28	42	56
35	24	63	21
49	70	0	7

b)

2	4	4
2	5	3
6	1	5

c)

4	7	10	14
1	9	17	25
23	19	15	11
2	4	8	16

d)

405	72	180	81
450	63	225	351
26	90	54	360
18	270	801	45

Možné řešení s komentářem

Na problémových úlohách tohoto charakteru žáky přitahuje princip záhady.

Řešení:
a) V tabulce jsou násobky čísla 7, proto tam nepatří 24.
b) Součet čísel v každém řádku i sloupci je roven 10, proto tam nepatří 5 vpravo dole.
c) Čísla v jednotlivých řádcích tvoří posloupnost, proto tam nepatří 14.
d) Ciferný součet čísel v tabulce je 9, proto tam nepatří číslo 26.

Zajímavá matematika (nejen) pro páťáky (Molnár, Mikulenková, 1997)

Seřaď kamarády

Kamarádi Alena, Broňa, Cyril a Dana stojí ve vrcholech čtverce a každý ukáže na toho, kdo je vyšší než on (šipky na obrázku). Seřaď kamarády podle velikosti.

Možné řešení s komentářem

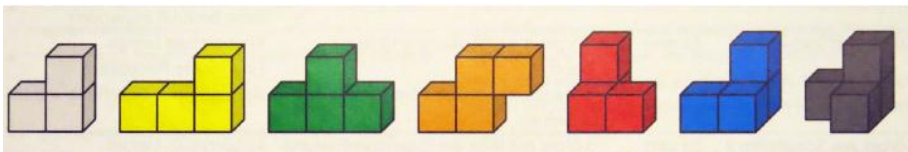
a) DCAB, b) BADC

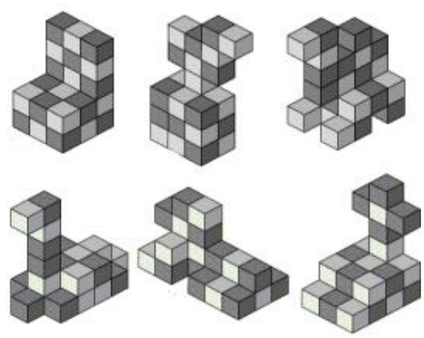
Didaktické hry

Na trhu je mnoho „chytrých“ her, které mohou být při vzdělávání nadaných žáků na 1. stupni ZŠ využívány. Nejenže žák při hře zažívá řešitelské vzrušení, ale učitel při pozorování může u žáka vysledovat schopnost strategického, analyticko-syntetického a kombinačního myšlení, schopnost využívat kauzalitu, analogii a kritický úsudek. Využívání chytrých her má tedy i velký diagnostický potenciál. Řadu zajímavých didaktických her naleznete v publikaci *Hry ve vyučování matematice jako strategie vedoucí k rozvoji klíčových kompetencí žáka* (Vávrová, Novotná, Volfová, Jančařík, 2006). Didaktické hry i s videonávodem jak s nimi pracovat naleznete v publikacích *Manipulativní činnosti rozvíjející matematickou gramotnost* a *Manipulativní činnosti a modelování rozvíjející matematickou gramotnost* (Fuchs, Lišková, Zelendová, 2013 a 2014).

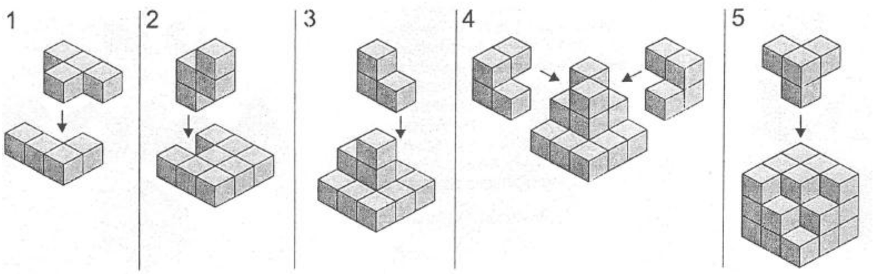
Kostka SOMA

S využitím všech sedmi dílů, které jsou znázorněny na následujícím obrázku, lze složit nejen kostku, ale řadu zajímavých prostorových útvarů.





Možné řešení



Tantrix

Pomůcky

Jedna herní sada plné verze Tantrixu obsahuje 56 šestihranných žetonů. Na nich jsou charakteristické linie v různých barevných kombinacích. Každá linie spojuje vždy dvě strany šestiúhelníku. Linie mohou být červené, žluté, zelené nebo modré barvy. Na jednom žetonu nejsou nikdy dvě linie stejné barvy. Každý žeton je jedinečný a na rubu je označen číslem od 1 do 56.

Aktivity

Žák hodí třemi kostkami, hodnoty na jednotlivých kostkách zpaměti sečte. Postupně napočítá stejný počet žetonů z připravené nabídky. Skládá z nich jednobarevné uzavřené cesty. Protože skládání není triviální, žák hledá řešení, odhaduje zakřivení drah, hledá návaznost žetonů. V některých případech se musí žák odhodlat k tomu, že složenou dráhu „zruší“ a začne skládat znovu, aby lépe využil své žetony. Pro vytvořenou uzavřenou křivku spočteme získané body. Počet bodů se rovná počtu žetonů, které žák celkem využil. Cílem je získat co nejvíc bodů.

Architecto

Pomůcky

Sadu tvoří tělesa (krychle, kvádr, válec, trojboký hranol apod.), která jsou zastoupena v různém počtu (např. dva válce, čtyři krychle), všechny však mají stejnou barvu. S výhodou lze využít stavebnici Architecto, která obsahuje 18 dílů, mezi nimiž najdeme i tělesa, která nepatří mezi tzv. základní.

Aktivity

Žák pracuje s trojrozměrnou předlohou stavby (bez členění na dílky). Ze všech dílů stavebnice si nejprve vybere jen ty, které ke stavbě potřebuje (tato tělesa jsou i s daným počtem uvedena v rámečku pod obrázkem stavby). Žák samostatně manipuluje s jednotlivými tělesy, pokládá je na sebe, otáčí je, rozhoduje se, kam které těleso umístit. Tyto činnosti jsou velmi důležité pro rozvoj prostorové představivosti. Podle úrovně dovedností žáků můžeme volit obtížnost stavby. Pro mladší žáky lze jako předlohu pro stavění využít barevné řešení.

Paměť 3D

Pomůcky

55 karet a 5 barevných kostek hry Paměť 3D (viz http://www.svet-her.cz/spolecenske-hry/pamet-3).

Aktivity

Žák staví pomocí barevných kostiček stavbu, která je znázorněna na obrázku (v sadě 55 kartiček jsou předlohy různé obtížnosti).

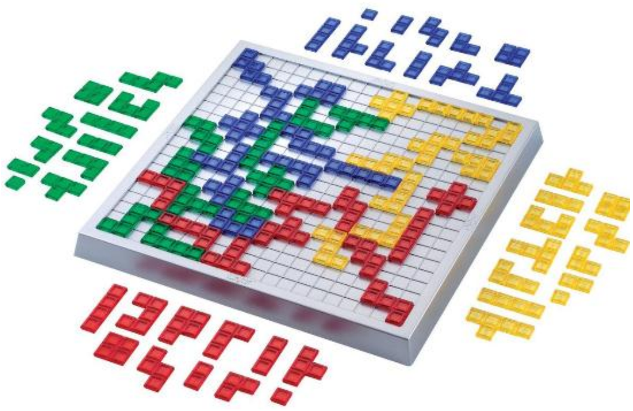
Úlohu můžeme ztížit tím, že si žák obrázek prohlédne, potom kartičku otočí a skládá stavbu zpaměti. Na závěr žák provede kontrolu shodnosti své stavby s předlohou.

Poznámka: aktivita rozvíjí prostorovou představivost a paměť, vnímání kvantity a vzájemných vztahů.

Blokus

Pomůcky

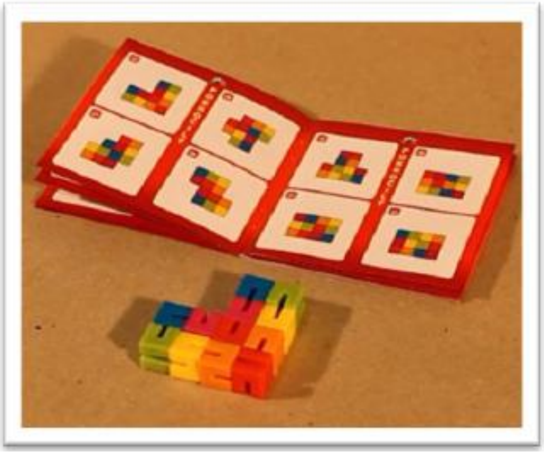
Úkolem hráčů společenské logické hry je umístit na herní plochu co nejvíce „kamenů“ příslušné barvy při dodržení daných pravidel (viz http://deskovehry.cz/index.php/Blokus).



Flex

Pomůcky

Víceúrovňová logická hra s 12 barevnými kostkami spojenými do řady, které lze ohýbat a otáčet jimi nejrůznějšími způsoby. Hra obsahuje 100 zadání v různé obtížnosti (viz http://www.deskove-hry.eu/flex-barevny-hlavolam).



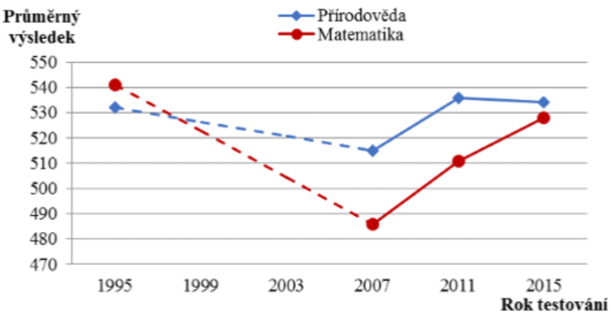
Aktivity

Žák si vybere z nabídky zadání (sám si volí obtížnost), pracuje podle předlohy. Využívá odhad a schopnost prostorového vnímání, z počátku pozorujeme metodu pokus – omyl. Pracuje samostatně a soustředěně. Výsledek kontroluje s předlohou v přiložené brožuře. Postupně volí obtížnější předlohy.

7. Využití úloh z mezinárodního výzkumu TIMSS

Eva Zelendová

Česká republika se účastní projektu TIMSS, který sleduje matematické znalosti a dovednosti žáků prvního a druhého stupně ZŠ (4. a 8. ročníků) od roku 1995. V roce 2007 byl zaznamenán klesající trend úrovně u obou věkových kategorií. Pokles průměrného výsledku se také projevil snížením podílu žáků s nejlepšími výsledky v matematice. V roce 2011 jsme zaznamenali statisticky významné zlepšení českých žáků 4. ročníků (Tomášek, 2013). Také v roce 2015 následovalo zlepšení, přesto dosažená hodnota zaostává za rokem 1995.



Do roku 2015 se navýšil podíl žáků s dobrými výsledky, stále však podíl žáků s výsledky výbornými nedosahuje úrovně z roku 1995. Důraz na vzdělávání v metodice práce s talentovanými žáky jak při přípravě budoucích učitelů na fakultách, tak v rámci dalšího vzdělávání učitelů z praxe, a zaměření na metody individuálního přístupu k žákům by mohly vést ke zlepšení výsledků žáků (Tomášek, Basl, Janoušková, 2016).

Pedagogové při své práci s matematicky nadaným žákem mohou využít uvolněné úlohy z mezinárodního výzkumu TIMSS, které mají vyšší obtížnost (Janoušková, Tomášek, 2013). Několik takových úloh spolu s úspěšností českých žáků i s mezinárodním srovnáním představíme v následujícím textu.

Úloha M30, s. 34

$3 + 8 = \square + 6$

Které číslo patří do čtverečku, aby zápis byl pravdivý?

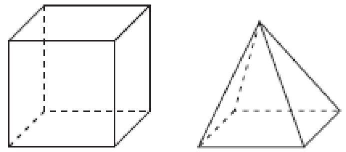
A) 17
B) 11
C) 7
D) 5

Úspěšnost

Úspěšnost (%)	Celkem
Česká republika (2007)	15,2
Česká republika (2011)	19,8
Mezinárodní průměr (2011)	39,2

Úloha M47, s. 53

Těleso A Těleso B



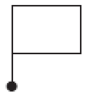
V tabulce je několik tvrzení o tělesech A a B. Označ křížkem X, jestli je tvrzení pravdivé nebo nepravdivé.

Tvrzení	Pravdivé	Nepravdivé
A i B mají jednu čtvercovou stěnu.	X	
A i B mají stejný počet stěn.		
Všechny úhly tělesa A jsou pravé úhly.		
B má více hran než A.		
Některé hrany B jsou zakřivené.		

Úspěšnost

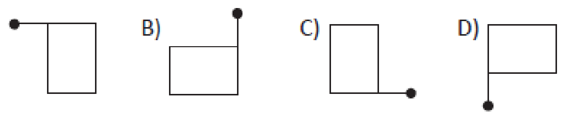
Úspěšnost (%)	Celkem
Česká republika (2007)	11,4
Česká republika (2011)	18,3
Mezinárodní průměr (2011)	32,5

Úloha M53, s. 60



Který z následujících obrázků zobrazuje obrazec nahoře po otočení o polovinu otáčky neboli o 180°?

A) B) C) D)

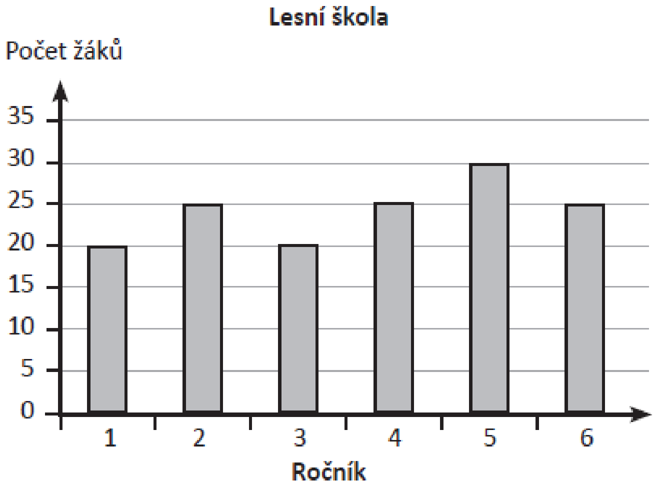


Úspěšnost

Úspěšnost (%)	Celkem
Česká republika (2007)	34,8
Česká republika (2011)	44,7
Mezinárodní průměr (2011)	42,7

Úloha M65, s. 72

Diagram znázorňuje počet žáků v jednotlivých ročnících „Lesní školy“.



V „Lesní škole“ je v každém ročníku učebna pro 30 žáků. O kolik více žáků by ještě mohlo chodit do této školy?

A) o 20 žáků
B) o 25 žáků
C) o 30 žáků
D) o 35 žáků

Úspěšnost

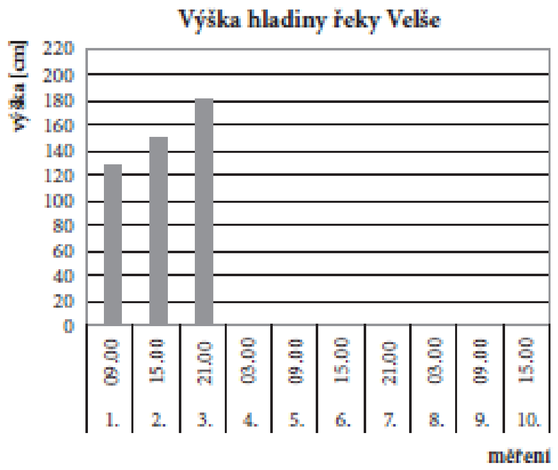
Úspěšnost (%)	Celkem
Česká republika (2007)	
Česká republika (2011)	45,3
Mezinárodní průměr (2011)	53,9

Mezinárodním šetřením TIMSS byly inspirovány úlohy v publikaci (Hejný, Houfková, Jirotková, Laufková, Mandíková, Starý, 2013). Sady typově podobných úloh na jednotlivých pracovních listech, které jsou obtížnostně odstupňovány, nabízejí učiteli možnost individualizovat přístup k žákům tak, aby i ti nejzdatnější žáci prožili uspokojení z vynaloženého intelektuálního úsilí.

Sada 6.E.1, s.76

Když výška hladiny říčky Velše, která protéká naší vesnicí, dosáhne 100 cm, je vyhlášen I. stupeň povodňové pohotovosti. Když dosáhne 160 cm, je vyhlášen II. stupeň, při 190 cm III. stupeň a při 210 cm je vyhlášen nejvyšší, IV. stupeň pohotovosti. Letos v říjnu hrozily opět záplavy. Povodňová hlídka stále sledovala stav hladiny Velše a každých 6 hodin od soboty 9:00 do pondělí 15:00 hodin, kdy již voda opadla, výšku hladiny měřila a některé údaje zapsala do tabulky. K těm, které nezapsala do tabulky, měla následujících pět informací. S jejich pomocí vyřešte úkoly, které jsou uvedeny pod tabulkou a diagramem.

pořadové č. měření	den	hodina	výška hladiny [cm]	stupeň povodňové pohotovosti
1.	sobota	09.00	128	
2.		15.00	149	
3.		21.00	181	
4.	neděle	03.00		
5.		09.00		
6.		15.00	205	
7.		21.00		
8.	pondělí	03.00		
9.		09.00	140	
10.		15.00		



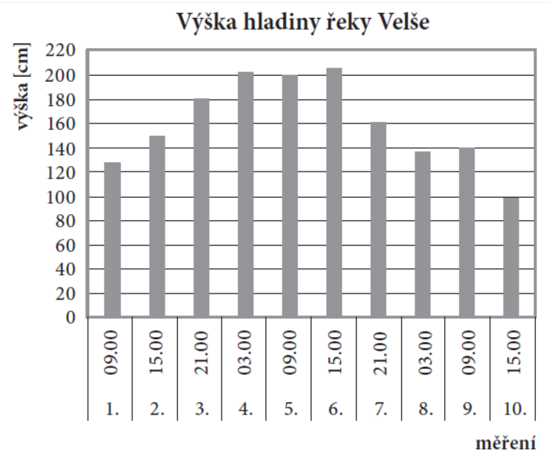
a) Doplň do tabulky chybějící údaje, když víš, že
1. při 4. měření byla hladiny řeky o 22 cm vyšší než při 3. měření
2. mezi 9. a 10. měřením klesla hladina řeky o 42 cm
3. při 4. měření byla hladiny řeky o 3 cm vyšší než při 5. měření
4. při 9. měření byla hladiny řeky rovněž o 3 cm vyšší než při 8. měření
5. pokles vody mezi 6. a 7. měřením byl o 20 cm větší než mezi 7. a 8. měřením

b) Doplň do tabulky stupeň povodňové aktivity.

c) Dokonči sloupcový graf.

Možné řešení

pořadové č. měření	den	hodina	výška hladiny [cm]	stupeň povodňové pohotovosti
1.	sobota	09.00	128	I.
2.		15.00	149	I.
3.		21.00	181	II.
4.	neděle	03.00	203	III.
5.		09.00	200	III.
6.		15.00	205	III.
7.		21.00	161	II.
8.	pondělí	03.00	137	I.
9.		09.00	140	I.
10.		15.00	98	--



8. Podpora Národního ústavu pro vzdělávání

Eva Zelendová

Metodické komentáře ke Standardům pro základní vzdělávání (Fuchs, Zelendová, 2015)

S platností od 1. září 2013 jsou Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy do Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání zařazeny jako příloha Standardy pro základní vzdělávání pro vzdělávací obory Český jazyk a literatura, Cizí jazyk a Matematika a její aplikace. Standardy, které jsou stanoveny jako konkretizované očekávané výstupy na konci prvního a druhého stupně, jsou tvořeny indikátory a ilustrativními úlohami. Indikátory stanovují minimální úroveň obtížnosti, která je ještě ilustrována prostřednictvím úloh. Cílem *Metodických komentářů ke Standardům pro základní vzdělávání* je pomoci učitelům při naplňování vzdělávacích cílů stanovených v RVP ZV dalšími podněty pro plánování této činnosti i pro jejich přímou vyučovací činnost. K vymezování obtížnosti cílů v jednotlivých kategoriích byla využita Bloomova taxonomie, pro excelentní úroveň její pátá a šestá úroveň (syntéza, hodnocení).

Cílová kategorie (úroveň osvojení)	Typická slovesa k vymezování cílů
5. Syntéza složení prvků a jejich částí do předtím neexistujícího celku (ucelené sdělení, plán nebo řada operací nutných k vytvoření díla nebo jeho projektu, odvození souboru abstraktních vztahů k účelu klasifikace nebo objasnění jevů	kategorizovat, klasifikovat, kombinovat, modifikovat, napsat sdělení, navrhnout, organizovat, reorganizovat, shrnout, vyvodit obecné závěry
6. Hodnocení posouzení materiálů, podkladů, metod a technik z hlediska účelu podle kritérií, která jsou dána nebo která si žák sám navrhne	argumentovat, obhájit, ocenit, oponovat, podpořit (názory), porovnat, provést kritiku, posoudit, prověřit, srovnat s normou, vybrat, uvést klady a zápory, zdůvodnit, zhodnotit

Ukázky úloh s excelentní obtížností:

Číslo a početní operace, IÚ 3, s. 14

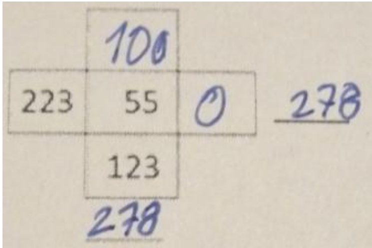
Doplň chybějící čísla do tabulky i na konec řádku a pod sloupec.
Součet čísel v řádku i sloupci musí být stejný.

223	55		____
	123		
	____		

Možné řešení s komentářem

Jedná se o otevřenou úlohu. Žák si může nejprve zvolit libovolný součet, který je větší nebo roven 278, a dopočítat každého ze sčítanců (např. součet 279 = (223 + 55) + 1 a z toho 279 = (123 + 55) + 101). Lze postupovat i od volby jednoho sčítance a dopočítat součet a druhého sčítance. Žáci objevují vztah mezi chybějícími sčítanci a součty.
Pro žáky je někdy tento typ úlohy obtížný právě pro její otevřenost. Zejména v aritmetické oblasti očekávají jednoznačné zadání příkladů „na procvičení“.
Někdy žáci doplní nejprve jednoho ze sčítanců a tím si úlohu rozloží na sled jednoduchých příkladů odpovídajících předchozí úloze. V takové situaci je vhodné položit žákovi otázku: „Můžeme začít doplněním součtů?“

Konkrétní doplnění čísel záleží na volbě součtu nebo jednoho sčítance. V ukázce žákovského řešení vidíme „minimalistické pojetí“ (třetí sčítanec je nula), které dobře vystihuje vztah mezi dvojicemi sčítanců.

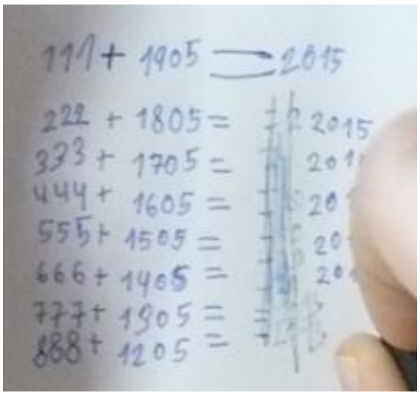


Číslo a početní operace, IÚ 16, s. 21

Součet dvou (různých) čísel je 2015. Urči tato čísla, když víš, že jedno z čísel je trojciferné a má všechny tři číslice stejné. Najdi všechna řešení.

Možné řešení s komentářem

Sledujeme, zda považuje žák za řešení jednu dvojici sčítanců, které vyhovují daným podmínkám, nebo hledá všechna možná řešení. Pokud žáci najdou pouze jedno řešení, navážeme individuálně s žákem rozhovor podněcující ho k hledání dalších řešení.



Prvním krokem je nalezení čísla, které je trojciferné a má všechny tři číslice stejné. Pokud žáky na tento dílčí krok (nalezení jednoho ze sčítanců) upozorníme, úloha se zjednoduší na hledání druhého ze sčítanců. Takto vedení žáci často najdou jedno řešení, ale při výzvě k hledání dalších řešení, končí slovy „už nevím". Tím se vracíme k porozumění prvního kroku řešení úlohy.

Ač není uvedené žákovské řešení správné, vidíme zde dobře porozumění vztahu obou sčítanců a součtu (žák dobře ví, jaký je součet, pokud se jeden ze sčítanců zvětší o 100 a výsledek zůstává stejný, pak musí být druhý ze sčítanců o 100 menší).

Závislosti, vztahy a práce s daty, IÚ 8, s. 52

Pan a paní Sýkorovi se svými třemi dětmi ve věku 5, 8 a 12 let chtějí podniknout celodenní výlet k Vrbenským rybníkům (zastávka České Vrbné) v Českých Budějovicích. Z domova (zastávka Pohůrka-kulturní dům) chtějí vyjet v sobotu kolem osmé hodiny a vrátit se domů nejpozději v 18 hodin.
Vyhledej pro ně nejvýhodnější spojení a jízdné.

1) V kolik hodin musí Sýkorovi vyjet a kdy se mohou vrátit? Jakými spoji (čísla autobusových linek MHD) musí Sýkorovi jet, kde budou přestupovat, jak dlouho budou čekat na další spoj?
2) Kolik celkem zaplatí za jízdenky MHD? Vyhledej cenově nejvýhodnější možnost.

Nápověda:

a) Tarify jízdného pro MHD můžeš vyhledat na adrese http://www.dpmcb.cz/info-pro-cestujici/tarif-jizdneho-mhd/.
b) Nejsnazší vyhledání potřebného spojení - IDOS - MHD České Budějovice - Vyhledání spojení nebo http://jizdnirady.idnes.cz/ceskebudejovice/spojeni/
c) Pokud nemáš k dispozici internet, použij pro řešení úlohy následující tabulky:

JEDNOTLIVÉ JÍZDENKY	20 minut	60 minut	24 hodin	168 hodin (7-denní)	60 minut (prodej u řidiče)
Osoba starší 16-ti let věku a důchodce do 70-ti let věku	13,- Kč	16,- Kč	50,- Kč	190,- Kč	25,- Kč
Děti od 6-ti do 15-ti let (včetně)	6,- Kč	7,- Kč	20,- Kč	190,- Kč	10,- Kč

SMS JÍZDENKY	60 minut	24 hodin
Osoba starší 16-ti let věku a důchodce do 70-ti let věku	25,- Kč	70,- Kč
Děti od 6-ti do 15-ti let (včetně)	25,- Kč	70,- Kč

HROMADNÉ JÍZDENKY	CENA	DOBA PLATNOSTI
Rodinná jízdenka pro max. 2 osoby starší 16-ti let a max. 3 děti do 15-ti let (včetně)	100,- Kč	VÍKEND *)
Hromadná školní jízdenka pro max. 30 dětí do 15-ti let (včetně) a max. 2 dospělé osoby jako doprovod	200,- Kč	240 minut (4 hodiny)

*) Rodinná jízdenka je platná v sobotu (SO) a neděli (NE) a ve státem uznaných svátcích (st. svátek).
Platnost jízdenky je od 00.00 hodin SO (st. svátek) do 24.00 hodin (NE) nebo konec st. svátku.
Tato jízdenka je platná pro max. 2 dospělé osoby a 3 osoby do 15 let věku (včetně).
Všechny jednotlivé jízdenky jsou přestupní.

Dopolední spoje do Českého Vrbného

	Odkud/Přestup/Kam	Příj.	Odj.	Pozn.	Spoje
27.9.	Pohůrka-kulturní dům	>	6:31		10
	Nádraží (vlakové a autobusové)	6:41	7:05		9
	České Vrbné	7:24			
	Celkový čas **53 min**, vzdálenost **10 km**, cena **16 Kč**				

Odkud/Přestup/Kam	Příj.	Odj.	Pozn.	Spoje
Pohůrka-kulturní dům	>	8:06		13
Nádraží (vlakové a autobusové)	8:15	8:25		9
České Vrbné	8:44			
Celkový čas **38 min**, vzdálenost **10 km**, cena **16 Kč**				

Odkud/Přestup/Kam	Příj.	Odj.	Pozn.	Spoje
Pohůrka-kulturní dům	>	9:31		13
Nádraží (vlakové a autobusové)	9:40	9:45		9
České Vrbné	10:04			
Celkový čas **33 min**, vzdálenost **10 km**, cena **16 Kč**				

Večerní spoje na Pohůrku

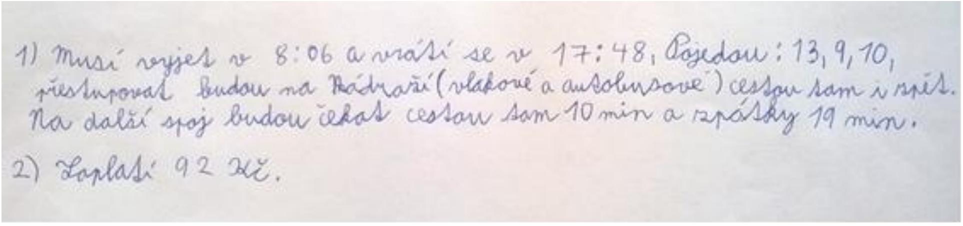
Odkud/Přestup/Kam	Příj.	Odj.	Pozn.	Spoje
České Vrbné		17:00		9
Nádraží (vlakové a autobusové)	17:20	17:39		10
Pohůrka-kulturní dům	17:48	>		
Celkový čas **48 min**, vzdálenost **11 km**, cena **16 Kč**				

Odkud/Přestup/Kam	Příj.	Odj.	Pozn.	Spoje
České Vrbné		17:20		9
Nádraží (vlakové a autobusové)	17:40	18:00		13
Pohůrka-kulturní dům	18:09	>		
Celkový čas **49 min**, vzdálenost **10 km**, cena **16 Kč**				

Možné řešení s komentářem

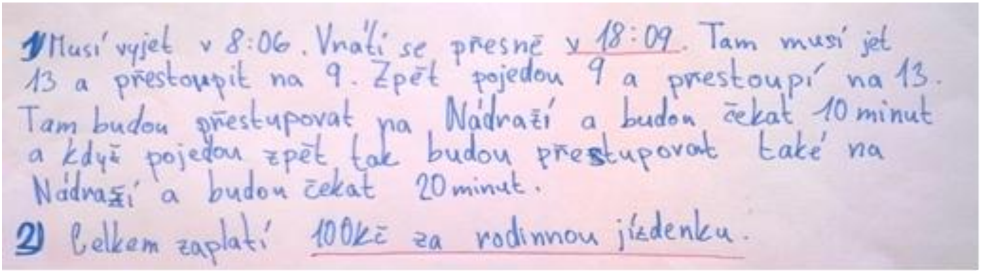
Na excelentní úrovni je vhodné doplnit úlohy o práci žáků s internetovými zdroji, samostatné vyhledávání spojů MHD, autobusových či vlakových spojů a plánování cest včetně cenových kalkulací. Žáci mohou pracovat samostatně nebo ve dvojicích. Při společné kontrole výsledku je možné doplnit úlohu o další úkoly (např. vysvětli, proč se liší čas i délka cesty tam a zpět).

Řešení:


1) Musí vyjet v 8:06 a vrátí se v 17:48, Pojedou: 13, 9, 10,
přestupovat budou na Nádraží (vlakové a autobusové) cestou tam i zpět.
Na další spoj budou čekat cestou tam 10 min a zpátky 19 min.

2) Zaplatí 92 Kč.

Cena jízdenek: 2 · 16 Kč (dospělí) + 2 · 7 Kč (děti) = 46 Kč; za dvě cesty zaplatí 92 Kč.
Sýkorovi si musí zakoupit 4 jízdenky za 16 Kč a 4 jízdenky za 7 Kč. Takto zakoupené jízdenky jsou o 8 Kč levnější než rodinná jízdenka na víkend.
Ukázka žákovského řešení s chybami


1) Musí vyjet v 8:06. Vrátí se přesně v 18:09. Tam musí jet
13 a přestoupit na 9. Zpět pojedou 9 a přestoupí na 13.
Tam budou přestupovat na Nádraží a budou čekat 10 minut
a když pojedou zpět tak budou přestupovat také na
Nádraží a budou čekat 20 minut.

2) Celkem zaplatí 100Kč za rodinnou jízdenku.

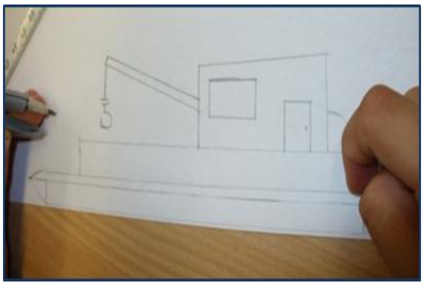
Poznámka: Žáci při řešení často volili spoj, který přijede až v 18:09, což neodpovídá zadání (do 18 hodin). Nepočítali ceny jednotlivých jízdenek a okamžitě se rozhodli pro rodinnou jízdenku, což v tomto případu nebylo cenově nejvýhodnější.

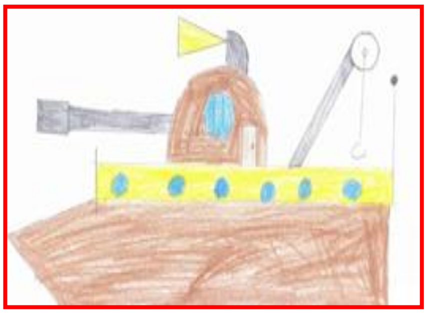
Geometrie v rovině a prostoru, IÚ 3, s. 80

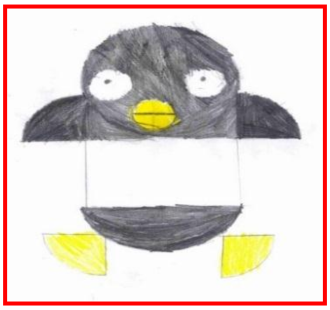
Vezmi si čtvrtku a nakresli na ni libovolný obrázek pomocí kružítka a pravítka. Na svém narýsovaném obrázku můžeš mít cokoliv, ale musí v něm být přímky rovnoběžné, přímky kolmé, kruh, půlkruh i čtvrtkruh. (Přemýšlej, jak asi čtvrtkruh vypadá, určitě na to přijdeš).

Možné řešení s komentářem

Nacvičujeme dovednosti v rýsování. Úloha je vhodná pro rozvíjení tvůrčí představivosti žáků i seznámení s tvarem čtvrtkruhu (lze jej dobře využívat v tématu „zlomky“).
Dáme-li žákům dostatečný časový prostor, překvapí nás bohatstvím své fantazie i přesností (smysluplného) rýsování. Úloha je vhodná i jako domácí cvičení.

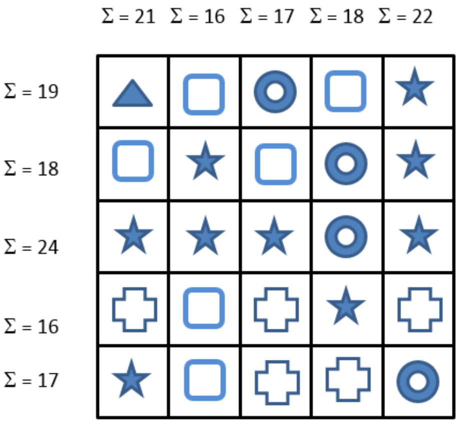






Nestandardní aplikační úlohy a problémy, IÚ 7, s. 114

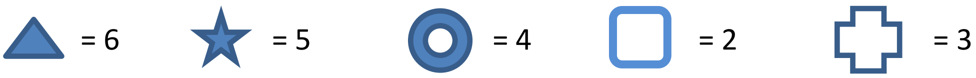
Každý symbol zastupuje určité číslo. Zjistěte číselnou hodnotu každého symbolu tak, abyste zajistili správný součet, který je uveden u každého řádku i sloupce. Proveďte kontrolu.



Možné řešení s komentářem

Pozorujeme a případně diskutujeme s žáky jejich různé metody řešení. Argumentace a obhajování vlastního řešení má pro poznávací proces všech zúčastněných žáků velký význam. Při řešení se setkáme s metodou porovnávání, s odhady, s metodou „pokus – omyl“. Někteří žáci projevují jistou úroveň strategického myšlení (začínají například třetím řádkem, kde se objevuje nejvíce shodných symbolů).

Řešení:



Kontrola:

řádky
6 + 2 + 4 + 2 + 5 = 19
2 + 5 + 2 + 4 + 5 = 18
5 + 5 + 5 + 4 + 5 = 24
3 + 2 + 3 + 5 + 3 = 16
5 + 2 + 3 + 3 + 4 = 17

sloupce
6 + 2 + 5 + 3 + 5 = 21
2 + 5 + 5 + 2 + 2 = 16
4 + 2 + 5 + 3 + 3 = 17
2 + 4 + 4 + 5 + 3 = 18
5 + 5 + 5 + 3 + 4 = 22

Poslední kapitola metodických komentářů je věnována vzdělávání žáků se speciálními vzdělávacími potřebami. V ní se mimo jiné připomíná nezastupitelná role učitele při vzdělávání nadaných žáků v běžné třídě:

Je úkolem učitele matematiky jejich nadání rozvíjet. Není vhodné zaměstnávat žáky větším množstvím úloh co do počtu, ale je nutné vybírat úlohy s vyšší náročností na logické myšlení. Zadáváme úlohy, které podněcují žáka k objevování zákonitostí, využití intuice a vhledu, k vytváření hypotéz a jejich ověřování, k různým řešením téže úlohy, k zobecňování apod. Vybíráme úlohy z témat, která nejsou v učivu matematiky explicitně zařazena, které však mohou žáci se svými vědomostmi řešit. Jde o úlohy s náměty z logiky, kombinatoriky, teorie grafů, problémové úlohy, úlohy rozvíjející geometrickou představivost, doplňování různých schémat apod. Důraz klademe vždy na logickou úvahu, nikoliv na uplatňování postupů pomocí matematického aparátu vyšších ročníků (např. velkou část úloh řeší dospělí pomocí rovnic, žáci však rovnice k řešení úlohy uplatnit nemusejí). Dopřejeme žákům využití grafického znázornění úlohy, neboť vizualizace je pro většinu žáků prostředkem k usnadnění řešení. Vedeme žáky k vyhledávání všech řešení dané úlohy a k zápisům postupu řešení. Právě se zápisy řešení mají nadaní žáci velké problémy a je třeba je postupně tomu učit.

Zkušenosti ukazují, že vzdělávání nadaných žáků v rámci běžné třídy základní školy s tím, že je jim věnována individuální péče a že mají možnost např. jednou až dvakrát týdně zúčastnit se práce v kroužku pro nadané děti, je pro jejich sociální rozvoj nejpříznivější.

Metodický portál RVP.CZ

Metodický portál RVP.CZ vznikl v roce 2003 jako hlavní metodická podpora učitelů a k podpoře zavedení rámcových vzdělávacích programů ve školách. Jeho smyslem bylo vytvořit prostředí, ve kterém se budou moci učitelé navzájem inspirovat a informovat o svých zkušenostech. Základními kameny Metodického portálu jsou pestrost, komplexnost, garantovanost, kvalita obsahu a inovativnost.

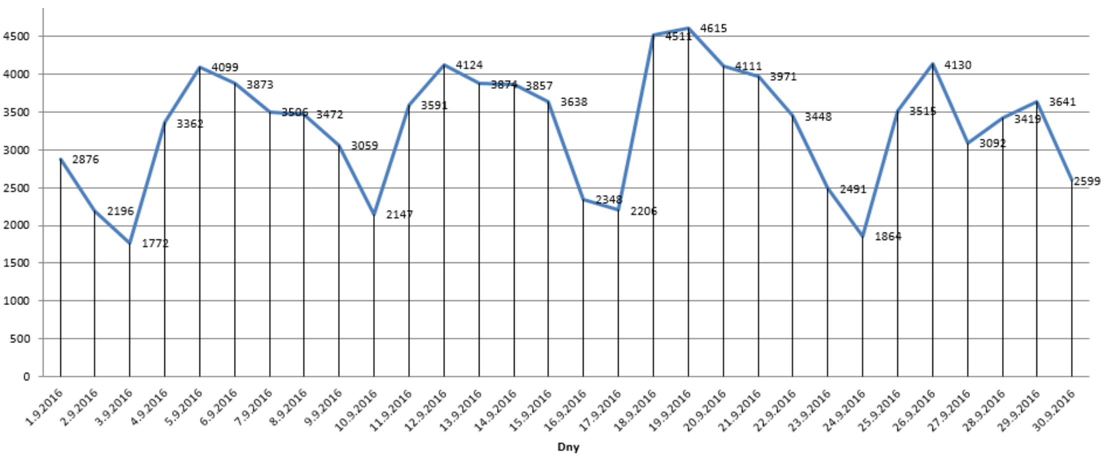
K 20. září 2016 měl Metodický portál 28 011 registrovaných uživatelů. K tomuto datu bylo na Metodickém portálu zveřejněno:

7 379 článků
9 690 digitálních učebních materiálů
4 560 samostatných stránek v učitelské wiki
1 635 příspěvků v modulu Odkazy
35 003 příspěvků v diskusích
1 893 příspěvků v blozích
1 559 portfolií uživatelů
10 659 komentářů k příspěvkům.

Prostřednictvím napojení na evropské úložiště Learning Resource Exchange for Schools mohou uživatelé využívat 36 843 výukových objektů.

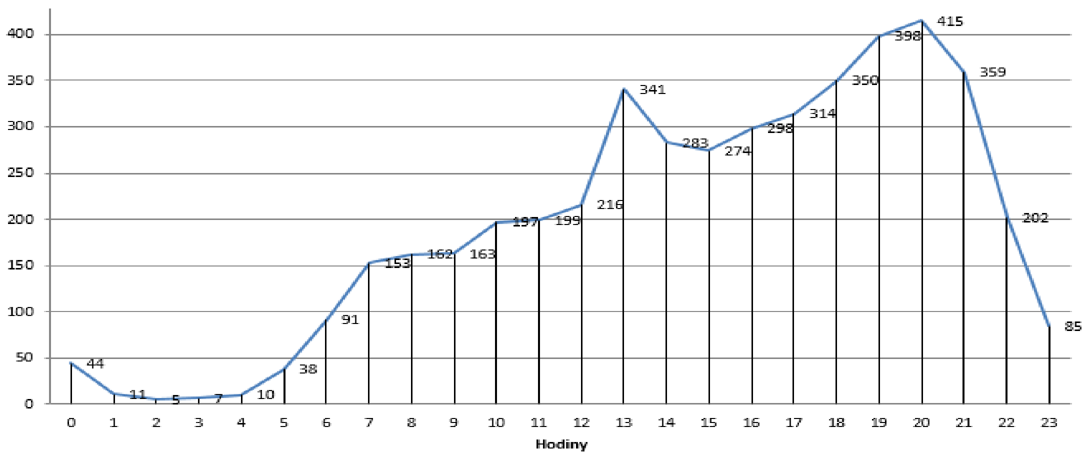
Metodický portál je členěn do sedmi sekcí. Počty všech příspěvků v jednotlivých sekcích k výše uvedenému datu:

Předškolní vzdělávání – 5 758
Základní vzdělávání – 23 645
Gymnaziální vzdělávání – 7 321
Odborné vzdělávání – 3 603
Základní umělecké vzdělávání – 632
Speciální vzdělávání – 1 853
Jazykové vzdělávání – 613.



Výše uvedený graf zachycuje návštěvnost Metodického portálu v průběhu září 2016, v grafu jsou zřetelná sobotní lokální minima a pondělní lokální maxima.[11] Průběh návštěvnosti Metodického portálu během pracovního dne (pondělní maximum) ilustruje následující graf.

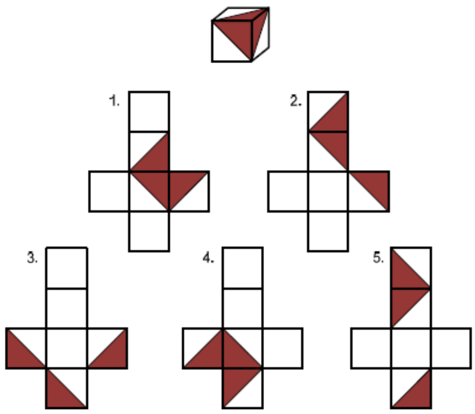
[11] Údaje poskytl Mgr. Ivo Krobot, vedoucí Metodického portálu RVP.CZ.



Na Metodickém portálu naleznete Tematický vstup Nadaní žáci http://digifolio.rvp.cz/view/view.php?id=2125), ve kterém jsou jednotlivé články a metodické materiály rozděleny do pěti oddílů: Teorie a výzkum; RVP, ŠVP a legislativa; Identifikace, diagnostika a poradenská podpora; Metodická podpora a odkazy. Na Metodickém portálu RVP.CZ naleznete i zajímavou publikaci, o které se zmíníme v následujícím textu.

Nestandardní aplikační úlohy a problémy pro 1. stupeň ZŠ (Houska, 2008)

Publikace obsahuje *zajímavé úlohy a problémy, které vyžadují vytvoření určitého plánu práce, vedou žáky k rozvíjení kombinatorického a logického myšlení, také k rozvíjení systematičnosti, vytrvalosti a přesnosti při nalézání nejefektivnějšího postupu při řešení problému. Mnohé náměty přibližují různé situace z běžného života, přičemž využívají vzájemný vztah aritmetiky (nebo algebry) a geometrie, poukazují na možnost řešení úloh různými způsoby, představují zajímavé možnosti k realizaci náhodného pokusu nebo jeho simulaci apod.* (Houska, 2008)

Nestandardní aplikační úlohy a problémy (VÚP), s. 30
Vyberte z několika sítí krychle ty, ze kterých můžeme složit zakreslenou krychli. 
Řešení
Sítě 1, 2, 4.

Nestandardní aplikační úlohy a problémy (VÚP), s. 38

Nakladatelství má vydat dvě knihy. U první jsou třeba 4 časové jednotky (zpravidla týdny) na tisk a 3 časové jednotky pro vazbu, u druhé 3 časové jednotky pro tisk a 2 časové jednotky na vazbu. V jakém pořadí se mají knihy vydat, aby se tiskárna nezastavila, a aby knihy byly co nejdříve svázány?

Řešení

Existují dvě možnosti pořadí pro tisk obou knih, následně po sobě.

a) Jestliže napřed vytiskneme první knihu, může být svázána bezprostředně při tisku druhé. Celková časová náročnost je 9 jednotek času.
b) Jestliže začneme napřed s tiskem druhé knihy, potom časová náročnost výroby obou knih je o 1 časovou jednotku větší, tj. 10.

Z hlediska času je tedy výhodnější první způsob.

Vyřešíme ještě knihařský problém v náročnější variantě.

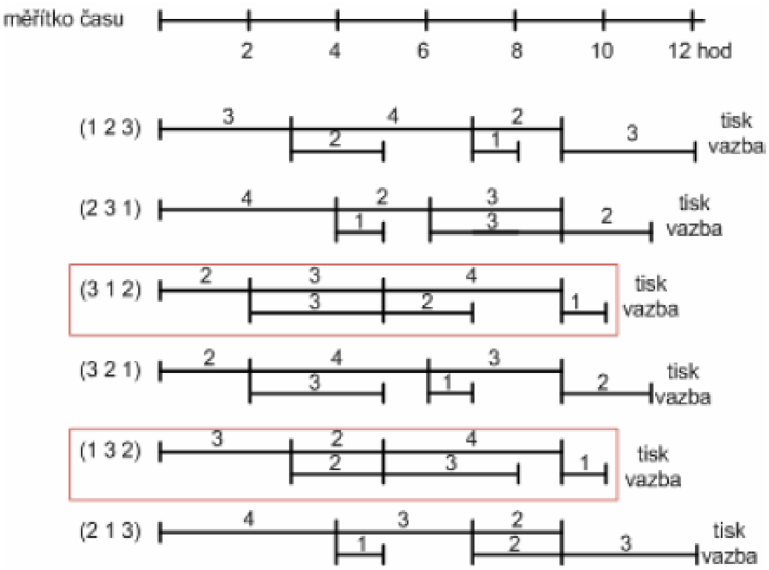
Nestandardní aplikační úlohy a problémy (VÚP), s. 38

Nakladatelství má vydat tři knihy. Časové podmínky jsou uvedeny v tabulce:

	tisk	**vazba**
1. kniha	3	2
2. kniha	4	1
3. kniha	2	3

Řešení

Pro 3 knihy máme celkem 6 pořadí. Z náčrtu všech situací snadno zjistíme, že optimální jsou pořadí (3, 1, 2) nebo (1, 3, 2). V obou případech je časová náročnost 10. Při těchto dvou pořadích je ve vazačské dílně nejméně ztrátových časů.



9. Podpora Společnosti učitelů matematiky (SUMA JČMF)

Eva Zelendová

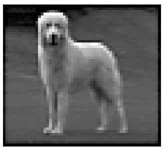
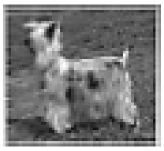
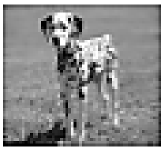
Konference pro učitele

- ### Ani jeden matematický talent nazmar, Hradec Králové

Konference učitelů matematiky a přírodovědných oborů na základních, středních a vysokých školách pracujících s talentovanými žáky a studenty, která se koná od roku 2003 každé dva roky.

Kupujeme psíka, s. 151 (Vašutová, 2011)

Mojím najväčším želaním je mať doma psa. Nie je to však jednoduché, pretože nebývame v dome so záhradou, ale v panelovom byte. Tento rok som presvedčila rodičov, aby mi nejakého psíka kúpili. Na internete som našla ponuku aj s fotografiami. Veľmi ma to zaujalo, a tak som sa rozhodla, že si jedného z nich vyberiem. Na to som potrebovala vedieť čítať údaje z tabuľky. Možno to vyzerá jednoducho, ale vyskúšajte si sami, ako by ste to zvládli.

Aktuálna ponuka psov					
plemeno	Podhalandský ovčiak	Austrálsky hodvábny teriér	Dalmatínsky pes	Čau Čau	Jack Russel terier
narodený	marec 2008	máj 2010	september 2010	apríl 2009	november 2010
výška (v kohútiku)	65–70 cm	23–26 cm	56–58 cm	48–56 cm	25–30 cm
náročnosť	potreba priestoru a výbehu	zvýšená starostlivosť o srsť	voľnosť, dostatočný výbeh	zvýšená starostlivosť o srsť	nenáročný
charakter	pokojný, spoľahlivý	vrtký, hravý, nepokojný	hravý, spoločenský	spoločenský, prítulný, pokojný	veselý, energický, hravý
vhodný na chov	dom	byt	dom	dom aj byt	byt
cena	56 €	41 €	48 €	39 €	37 €

Úloha 1. Z tabuľky zisti a doplň odpovede k nasledujúcim otázkam:
Ktorý pes sa narodil v septembri v roku 2010? ....
Ktorý pes je vyšší ako 40 cm a je vhodný na chov v byte? ....
Ktorý psík stojí menej ako 40 eur? ....

Ja by som si najradšej kúpila všetkých psíkov.

Úloha 2. Vypočítaj! Koľko eur by som potrebovala, keby som sa rozhodla kúpiť si všetkých psíkov?

Další konference pro učitele matematiky na prvním stupni ZŠ, které organizuje SUMA JČMF (víc informací je dostupné na: http://www.suma.jcmf.cz/akce/konference/):

- Jak učit matematice žáky ve věku 10-16 let, Litomyšl
- Dva dny s didaktikou, Praha
- Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol, Srní
- Letní škola s didaktikou matematiky, Uherské Hradiště

Projekty, které realizovala SUMA JČMF

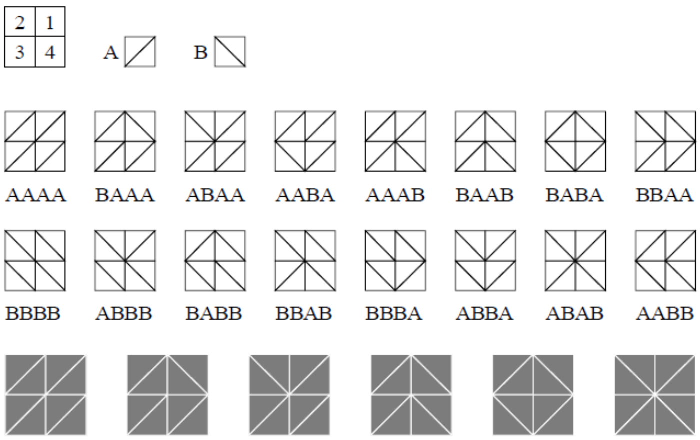
- **Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP**

V rámci projektu vznikly velmi zajímavé texty, které napsali učitelé z různých typů škol pro potřeby výuky matematiky na základní i střední škole. Texty obsahují celou řadu praktických rad, úloh, geometrických šablon apod.

Mozaikové čtverce, C05 Geometrické modelování jako příležitost k aktivnímu učení, s. 45

Určete, kolika různými způsoby lze sestavit z osmi shodných rovnoramenných pravoúhlých trojúhelníků čtverec.

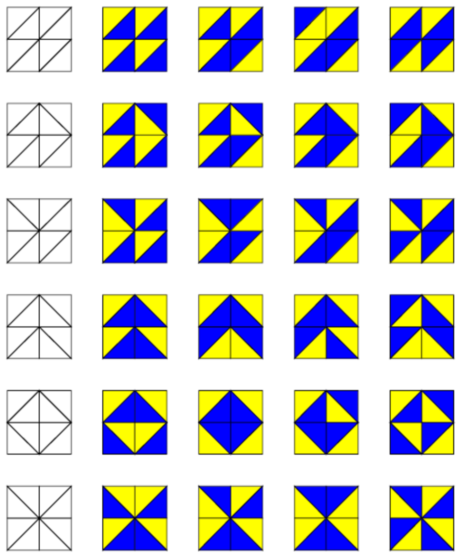
Možné řešení s komentářem



Obr. 15

Je zřejmé, že čtverec tvoří čtyři menší čtverce sestavené ze dvou trojúhelníků. Stavebním prvkem čtverce je tedy čtverec A nebo B na obr. 15 nahoře. Najít všechny způsoby sestavení čtverce znamená najít všechna uspořádání malých čtverců A nebo B ve velkém čtverci. Z obrázku 15, který znázorňuje všech šestnáct možných uspořádání čtverců A a B, snadno zjistíme, že existuje šest různých způsobů sestavení velkého čtverce (viz obr. 15 dole), neboť například čtverec v uspořádání BBBB získáme otočením čtverce AAAA kolem jeho středu o 90°, jsou tudíž shodná. Shodná jsou rovněž uspořádání BAAA, AABA, BABB, BBBA, dále uspořádání ABBB, ABAA, AAAB, BBAB a BAAB, BBAA, ABBA, AABB.

Inverzní úlohou k této úloze je určit, kolika různými způsoby lze čtverec rozdělit na osm shodných rovnoramenných trojúhelníků. V obou případech jde o propedeutiku souměrnosti obrazců. Můžeme například zjišťovat, zda je obrazec osově nebo středově souměrný, případně určovat počet os souměrnosti. Řešit takovou úlohu je velmi snadné, neboť všech šest obrazců na obr. 15 dole je osově souměrných a tři z nich jsou zároveň středově souměrné. Použijeme-li však pro sestavení čtverce trojúhelníky dvou barev (například čtyři modré a čtyři žluté), dostaneme mnohem více obrazců, jejichž klasifikace podle typu souměrnosti je obtížnější. Je třeba poznamenat, že barva jako fyzikální vlastnost objektu není v geometrii považována za důležitou, v mozaikových obrazcích ji však budeme zohledňovat.



- **Matematika pro všechny**

Na webových stránkách home.pf.jcu.cz/~math4all/ projektu jsou uveřejněny úlohy, které mohou žáky zaujmout svou tematikou (např. řešení úloh s aktuálními problémy běžného života, propojení matematiky s dalšími oblastmi vzdělávání, souvislost matematiky s historií a uměním) i možnostmi řešení (využití výpočetní techniky a interaktivní tabule, Internetu, matematického softwaru, volně dostupného programu GeoGebra apod.). Úlohy jsou odstupňovány podle obtížnosti.

1. stupeň ZŠ – Hrátky, kvízy, rébusy – Vyznáš se v kalendáři?
V jednom roce bylo v měsíci lednu čtyřikrát úterý a čtyřikrát byla sobota. Který den v týdnu byl v tomto roce 9. ledna?

Možné řešení s komentářem

Můžeme si vytvořit „svůj kalendář“na leden, např. takto:

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

Odtud je zřejmé, že 4 dny v týdnu se opakují čtyřikrát, 3 dny v týdnu se opakují třikrát. Z podmínek úlohy vyplývá, že úterý a sobota se opakují čtyřikrát. Z pohledu na kalendář je zřejmé, že úterý muselo být 7., proto je 9. ledna čtvrtek.

• Matematika v médiích

Jednu z možností, jak využít potenciál, který slovní úlohy učitelům i žákům nabízejí, je metoda tvorby slovních úloh na základě autentického motivačního textu. SUMA JČMF v projektu propojila odborníky z vysokých škol, které vzdělávají učitele, s učiteli přímo z praxe s cílem seznámit s touto metodou širší pedagogickou veřejnost.

Rozměr Země, s. 47

Zdroj: Kniha SIHELLA, S. *Světové rekordy*. Bratislava: Perfekt, 2005.


rozměr Země

Obvod Země je 40 076 km. Měří se na ***rovníku***, což je myšlená kružnice, která naši planetu rozděluje na dvě polokoule (hemisféry): jižní a severní.

1) Pozorně si přečtěte text a barevně vyznačte slova, která neznáte, nebo části vět, kterým nerozumíte a potřebujete je vysvětlit. Hledejte význam slov ve slovníku, encyklopedii nebo na internetu.
2) Vysvětlete, co je obvod Země. Využijte glóbus, míč, polystyrenovou kouli, provázek apod.
3) Zopakujte si pravidla pro zaokrouhlování. Obvod Země postupně zaokrouhlete na desítky, stovky, tisíce a desetitisíce kilometrů.
4) Převeďte obvod Země na metry, decimetry, centimetry a milimetry.
5) Představte si, že bychom chtěli obejít Zemi po rovníku pěšky.
   a) Jak dlouho by nám to trvalo, kdybychom se pohybovali průměrnou rychlostí chodce?
   b) Kolik by to bylo hodin, dnů, týdnů, měsíců, roků?
   c) Kolik párů bot bychom spotřebovali za předpokladu, že nám jeden pár vydrží 2 000 km?
   d) Kolik bychom zaplatili za boty, počítáme-li průměrnou cenu za 1 pár 1 000 Kč?
   e) Za jak dlouho bychom tuto vzdálenost urazili na koloběžce, na kole, v autě, letadlem? K výpočtům použijte tyto průměrné rychlosti: koloběžka 10 km/h, kolo 20km/h, auto 80 km/h, letadlo 900 km/h.

6) Opravdu bychom mohli Zemi po rovníku celou obejít? (Než odpovíš, prozkoumej tuto cestu kolem Země na globusu.)

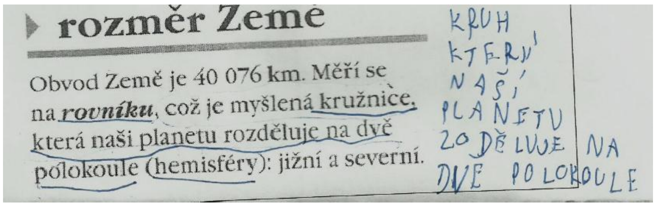
Možné řešení s komentářem

Motivační text je krátký, obsahuje pouze několik výchozích informací a údajů, poskytuje však příležitost k realizaci řady aktivit, zaměřených nejen na kognitivní, ale i afektivní komponentu rozvoje osobnosti žáka. Text umožňuje rozvíjet také mezipředmětové vztahy ve vzdělávacích oblastech Matematika a její aplikace a Člověk a jeho svět.

Pro rozvoj čtenářské gramotnosti jakož i kritického myšlení je vhodné při práci s tímto textem využít metodu INSERT. Název je zkratkou anglického označení „interactive noting system for effective reading and thinking“. Jak plyne z názvu, jedná se o metodu využívající interaktivních poznámek, které směřují čtenáře k rozvoji efektivního čtení a psaní. Ve svém celkovém pojetí vede tato metoda k porozumění přečtenému textu, rozhodování o vztahu ke čtenému textu v průběhu čtení a ke třídění informací do tabulky. Informace v textu dělí totiž do čtyř skupin na známé, rozporuplné, nové a neznámé. Značky, které žáci používají, udržují jejich pozornost, pomáhají jim s porozuměním a učí žáky chápat vzdělávání ne jako pouhé pamětné osvojení si informací, ale především jako proces, jehož nedílnou součástí je myšlení.

Vzhledem k zadaným aktivitám je vhodné žáky rozdělit do skupin po třech. Každá skupina potřebuje totiž „odborníka na zaokrouhlování“, „odborníka na převody jednotek délky“ a „odborníka na výpočty“. Žáci se nejprve sami označí za jednotlivé experty, poté se utvoří tříčlenné týmy odborníků.

1) Žáci pracují s textem metodou INSERT, kdy označují neznámé pojmy, které následně musí vyhledat a osvětlit. Pracují převážně na internetu a se slovníkem cizích slov.


rozměr Země

Obvod Země je 40 076 km. Měří se na ***rovníku***, což je myšlená kružnice, která naši planetu rozděluje na dvě polokoule (hemisféry): jižní a severní.

KRUH KTERÝ NAŠÍ PLANETU ROZDĚLUJE NA DVĚ POLOKOULE

2) Při řešení tohoto úkolu žáci nejčastěji využívají globus a provázek. Obvodem chápou délku nejdelší rovnoběžky (rovníku). Někteří používají pro modelování obvodu Země polystyrenovou kouli, která je rozříznutá na dvě polokoule. Ověřují si správnost tvrzení, že rovník je myšlená kružnice, která „rozděluje planetu na dvě polokoule“. Žáci přicházejí na to, že planetu nerozdělí na dvě polokoule kružnice ale kruh.

Někteří žáci potřebují návodné otázky např.: „Co je kružnice? Jak může pouze kružnice rozdělit kouli na poloviny?“

3) Úloha je zaměřena na dovednost žáků zaokrouhlovat pětimístné číslo 40 076.

Obvod Země	40 076
Zaokrouhleno **na desítky**	40 080
Zaokrouhleno **na stovky**	40 100
Zaokrouhleno **na tisíce**	40 000
Zaokrouhleno **na desetitisíce**	40 000

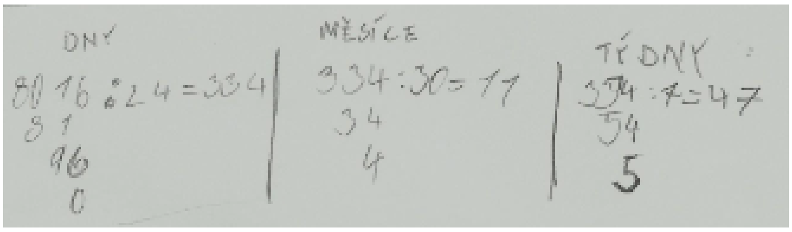
4) Úloha je zaměřena na převody jednotek délky. Žáci opět pracují s obvodem Země a jeho délku převádějí z kilometrů na metry, decimetry, centimetry a milimetry.

Délka rovníku **v metrech**	40 076 000
Délka rovníku **v decimetrech**	400 760 000
Délka rovníku **v centimetrech**	4 007 600 000
Délka rovníku **v milimetrech**	40 076 000 000

5)

a) Žáci musí nejprve zjistit, jaká je průměrná rychlost chodce. Při zjišťování využívají většinou internet (průměrná rychlost chodce je 5 km/hod).
Skupiny postupně přicházejí na možné řešení pomocí pamětného nebo písemného dělení 40 076 : 5 = 8 015,2

b) Pro výpočet žáci využijí opět písemné nebo pamětné dělení. Kolem rovníku bychom šli přibližně 334 dní, tj. asi 47 týdnů nebo 11 měsíců či necelý rok.



c) Spotřebovali bychom 21 párů bot (40 076 : 2 000 = 20,038).

d) Za boty bychom zaplatili 21 000 Kč (21 · 1 000 = 21 000).

e) Pracujeme se zaokrouhlenými údaji. K výpočtům použijeme zadané průměrné rychlosti, zaokrouhlené výsledky jsou uvedeny v následující tabulce. Většinou žáci pracují s výchozím číslem 40 076 km. Při počítání bez zaokrouhlení je možné využít kalkulačky.

Dopravní prostředek	Průměrná rychlost	Doba v hodinách	Zaokrouhleno (v hodinách)
koloběžka	10 km/h	40 076 : 10 = 4 007,6	**4 008**
kolo	20 km/h	40 076 : 20 = 2 003,8	**2 004**
auto	80 km/h	40 076 : 80 = 500,95	**501**
letadlo	900 km/h	40 076 : 900 ≐ 44,53	**45**

6) Při řešení tohoto úkolu vycházeli žáci ze zkušenosti z aktivity G1. Většina ani nepotřebovala znovu zkoumat globus nebo mapu. Objevily se odpovědi typu: „Ne, museli bychom i lodí.“ „Ne, neumíme chodit po vodě.“

Informační zdroje

BLAŽKOVÁ, R., BUDÍNOVÁ, I., DURNOVÁ, H., VAŇUROVÁ, M. *Matematika pro bystré a nadané žáky. Úlohy pro žáky 1. stupně ZŠ, jejich rodiče a učitele.* 1. vyd. Brno: Edika, 2016.

BLAŽKOVÁ, R., VAŇUROVÁ, M. *Matematické úlohy pro nadané děti.* Dostupné na: http://www.nadanedeti.cz/odborne-zdroje-rozvoj-nadanych-matematika [cit. 2016-08-10].

BLAŽKOVÁ, R., BUDÍNOVÁ, I. Podpora matematicky nadaných žáků v rámci inkluzivního vzdělávání na základní škole. In *MATEMATIKA 6. Matematické vzdělávání v primární škole – tradice, inovace* (s. 48-52). 1. vyd. Olomouc, 2014.

ČŠI Tematická zpráva Vzdělávání nadaných, talentovaných a mimořádně nadaných dětí a žáků. Praha: ČŠI, 2016. Dostupné na: http://www.csicr.cz/html/TZ_Podpora_mimoradne_nadanych/flipviewerxpress.html [cit. 2016-10-27].

EISENMANN, P., KOPÁČKOVÁ, A. Rozvoj funkčního myšlení ve výuce matematiky na základní škole: *Studijní materiály k projektu Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP* č. projektu: CZ.04.3.07/3.1.01.1/0137. JČMF 2006. Dostupné z: http://class.pedf.cuni.cz/NewSUMA/Default.aspx?PorZobr=20&PolozkaID=-1&ClanekID=188 [cit. 2014-03-25]

FUCHS, E., LIŠKOVÁ, H., ZELENDOVÁ, E. *Manipulativní činnosti rozvíjející matematickou gramotnost*. Praha: JČMF 2013.

FUCHS, E.,ZELENDOVÁ, E. (Eds.), *Matematika v médiích. Využití slovních úloh při kooperativní výuce na základních a středních školách.* 1. vyd. Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2015.

FUCHS, E.,ZELENDOVÁ, E. Slovní úlohy inspirované texty v médiích. In *EME2016 Proceedings. Primární matematické vzdělávání v souvislostech* (s. 87-90). 1. vyd. Olomouc, 2016.

FUCHS, E.,ZELENDOVÁ, E. (Eds.), *Metodické komentáře ke Standardům pro základní vzdělávání – Matematika.* 1. vyd. Praha: Národní ústav pro vzdělávání, 2015.

FUCHS, E.,ZELENDOVÁ, E. Metodické komentáře ke Standardům pro základní vzdělávání – Matematika. In *EME2016 Proceedings. Primární matematické vzdělávání v souvislostech* (s. 91-94). 1. vyd. Olomouc, 2016.

FUCHS, E.,ZELENDOVÁ, E. What teachers like (Co se učitelům líbí). In *Studia Scientifica Facultatis Paedagogicae* 14, No. 2, (s. 62-66). 1. vyd. Ružomberok, 2015.

HANNAH, K. Thinking outside the Cube*, Mathematics Teacher*, 106 (1) 2012, s. 12-15.

HEJNÝ, M. *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně.* Praha: UK v Praze, Pedagogická fakulta, 2014.

HEJNÝ, M., HOUFKOVÁ, J., JIROTKOVÁ, D., LAUFKOVÁ, V., MANDÍKOVÁ, D., STARÝ, K. a kol. *Čtenářské, matematické a přírodovědné úlohy pro první stupeň základního vzdělávání*. Praha: ČŠI 2013.

HOUSKA, Jan. Netradiční úlohy ve výuce matematiky. Metodický portál: Články [online]. 18. 02. 2009, [cit. 2017-03-08]. Dostupný z WWW: <http://clanky.rvp.cz/clanek/c/Z/3002/NETRADICNI-ULOHY-VE-VYUCE-MATEMATIKY.html>.

JANOUŠKOVÁ, S., TOMÁŠEK V. *TIMSS 2011. Úlohy z matematiky a přírodovědy pro 4. ročník.* Praha: ČŠI, 2013.

JURÁŠKOVÁ, J. *Základy pedagogiky nadaných.* Pezinok: Formát, 2003.

KASLOVÁ, M. Etnomatematika a antropodidaktika matematiky v programu nadprůměrných žáků. In *Ani jeden matematický talent nazmar 2011* (s. 47-65*).* Hradec Králové: Jednota českých matematiků a fyziků, 2013.

LIŠKOVÁ, H. Hledáme talenty i na 1. stupni ZŠ? In *Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol.* 1. vyd. Plzeň: Vydavatelský servis, 2016.

KONEČNÁ, V. Sebepojetí a sebehodnocení rozumově nadaných dětí. Disertační práce. Brno: FF MU 2010. Dostupné na: http://is.muni.cz/th/14655/ff_d/dizertacni_prace_Konecna.pdf [cit. 2016-08-16].

Korespondenční seminář Matýsek, Litomyšl (ročníky 2005, 2009, 2013). Dostupné na: http://www.vospspgs.cz/matematicky-korespondencni-seminar-matysek [cit. 2016-10-27].

KREJČOVÁ, E. *Hry a matematika na 1. stupni základní školy*. Praha: SPN, 2009

KUBÁTOVÁ, E., NOVÁK, B. Matematika a její aplikace. In: *Průvodce výukou dle RVP na 1. stupni ZŠ. 1. díl.* Olomouc: Prodos 2006.

KUŘINA, F. Parametry kvality matematického vzdělávání. In *Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol* (s. 121-125)*.* 1. vyd. Plzeň: Vydavatelský servis, 2014.

MACHŮ, E., KOČVAROVÁ, I. a kol. *Kvalita školy z hlediska péče o nadané žáky.* Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2013.

MOLNÁR, J., MIKULENKOVÁ, H. *Zajímavá matematika (nejen) pro páťáky.* Olomouc: Prodos, 1997.

Muzheve, M. T. Media Clips*, Mathematics Teacher*, 105 (8) 2012, s. 570-572.

Nestandardní aplikační úlohy a problémy pro 1. stupeň ZŠ. Praha: Výzkumný ústav pedagogický, 2008. Dostupné na: http://clanky.rvp.cz/wp-content/upload/prilohy/3002/nestandardni_aplikacni_ulohy_a_problemy_pro_1stupen_zs.pdf [cit. 2016-10-27].

NOVÁK, B., NOVÁKOVÁ, E. Matematika a její aplikace. In: *Průvodce výukou dle RVP na 1. stupni ZŠ. 2. díl.* Olomouc: Prodos 2008.

NOVOTNÁ, J., ZHOUF, J. Identifikace, motivace a podpora matematických talentů v evropských školách. In *Ani jeden matematický talent nazmar 2005* (s. 94-101). Praha: UK PF, 2005.

PORTEŠOVÁ, Š. Některé problémy spojené s identifikací nadaných žáků. In *Jak učit matematice žáky ve věku 10-16 let* (s. 247-256). Praha: SUMA JČMF 2014.

PORTEŠOVÁ, Š. *Typologie nadaných dětí.* 2016. Dostupné na: http://www.nadanedeti.cz/pro-ucitele-typologie-deti [cit. 2016-08-10].

ŠTEFKOVÁ, D. Matematická úloha – prostriedok rozvíjania poznávacích funkcií nadaných žiakov. In *MATEMATIKA 5. Specifika matematické edukace v prostředí primární školy* (s. 292-296). 1. vyd. Olomouc, 2012.

TOMÁŠEK, V., BASL, J., JANOUŠKOVÁ, S. *Mezinárodní šetření TIMSS 2015. Národní zpráva*. Praha: 2016

TOMÁŠEK, V. Výsledky českých žáků v šetření TIMSS a PISA. In *Ani jeden matematický talent nazmar 2013* (s. 17-22). Hradec Králové: Jednota českých matematiků a fyziků, 2013.

TOMÁŠEK, V., a kol. *Výzkum TIMSS 2007. Obstojí čeští žáci v mezinárodní konkurenci?* Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání 2008.

TOMÁŠEK, V., a kol. *Výzkum TIMSS 2007.* Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání 2009.

VAŇKOVÁ, J., LIŠKOVÁ, H. *Sedm matematických příběhů pro Aničku, Filipa, Matýska. Zábavné úlohy pro 4. a 5. ročník základní školy.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 2005

VAŠUTOVÁ, A. Úlohy na rozvíjanie matematickej gramotnosti žiakov prejavujúcich matematické nadanie v primárnej škole. In *Ani jeden matematický talent nazmar 2011* (s. 148-154). Hradec Králové: Jednota českých matematiků a fyziků, 2011.

VÁVROVÁ, A., NOVOTNÁ, J., VOLFOVÁ, M., JANČAŘÍK A. *Hry ve vyučování matematice jako strategie vedoucí k rozvoji klíčových kompetencí žáka.* Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2006. Dostupné na: http://www.suma.jcmf.cz/news/texty-z-projektu-esf-podil-ucitele-matematiky-zs-na-tvorbe-svp/ [cit. 2016-10-27].

ZELENDOVÁ, E. Inspirace ze zahraničí – úlohy ze života, *Učitel matematiky* 21 (2013), s. 213-219. Praha, 2013.

ZELENDOVÁ, E. Jak myslet a učit se pomocí textů v médiích. *Učitelské noviny: týdeník pro učitele a přátele školy.* 118 (45), s.13. Praha: 2015.

ZELENDOVÁ, E. Nadaní na Metodickém portálu www.rvp.cz. In *Ani jeden matematický talent nazmar 2009* (s. 168-171). Hradec Králové: Jednota českých matematiků a fyziků, 2009.

Publikace vznikla v rámci kmenového úkolu NÚV
Naplňování Koncepce podpory rozvoje nadání a péče o nadané
na období 2014–2020.

Vydal NÚV, Praha 2017
ISBN 978-80-7481-190-6

Národní ústav
pro vzdělávání